Método de Diferencias Finitas para un Problema de Bingham Unidimensional

Germán A. Torres * y Cristina Turner †
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba, 5000 Córdoba, Argentina

Abstract

In this work, a numerical method of finite differences is proposed to solve an unidimensional Bingham problem, and some theoretical properties of the solution are proved, and corroborate numerical results. A Bingham fluid is a non-newtonian fluid, whose viscous behaviour makes his layers move only if shear stress is greater than a threshold value τ_0 . There are some previous theoretical results that allows us to affirm existence and uniqueness of the solution under certain initial conditions. The proposed method is a finite difference scheme with spatial variable step, that is, while we move a fixed time step, we adjust the grid in such a way that the spatial step represents the free boundary advance. Using an internal calculus of fixed point is possible to reduce the number of flops, making feasible the implementation of the method in a computer. Besides that, a theorem of existence and uniqueness is proved for more general cases, and also a result about asymptotic behaviour is demonstrated.

Resumen

En este trabajo se propone un método numérico de diferencias finitas para resolver un problema de Bingham unidimensional y se demuestran algunas propiedades teóricas de la solución que sirven para corroborar los resultados numéricos. Un fluido de Bingham es un fluido no newtoniano cuyo comportamiento viscoso hace que sus capas se desplacen entre sí sólo si la tensión tangencial supera una cierta tensión umbral τ_0. Hay varios resultados teóricos previos que nos permiten afirmar la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas condiciones iniciales. El método consiste en el uso de diferencias finitas, más precisamente en la discretización de la variable temporal con un paso fijo, mientras que en la variable espacial se elige un paso variable, de modo tal que la grilla se vaya adaptando a la frontera libre a medida que el tiempo transcurre. Usando una iteración interna de punto fijo es posible reducir notablemente el costo computacional, haciendo factible la implementación práctica del método. Además se prueba un resultado de existencia y unicidad para problemas más generales y se demuestra cuál es el comportamiento asintótico.

Key words: Bingham fluid, finite differences, non-newtonian fluids
Palabras Claves: Fluido de Bingham, diferencias finitas, fluidos no newtonianos
AMS Subject Classification: 35A40, 35B40, 35R35, 39A12, 65M06

*torres@mate.uncor.edu
†turner@mate.uncor.edu

1 Introducción

Consideramos el fluido encerrado entre dos placas paralelas, y mediante el uso de la ecuación de Navier-Stokes para la región viscosa y la ecuación de movimiento de Newton para la parte rígida es posible modelar el comportamiento del sistema. La frontera que separa las dos regiones previamente mencionadas (la viscosa y la rígida) es desconocida y se encuentra en movimiento, y es una de las incógnitas más importantes del problema.

Existe una formulación débil, en forma variacional, para problemas de frontera libre del tipo del fluido de Bingham. Se puede consultar en [4],[5], [8], [9] y [10]. Además en [11] hay detallada una extensa bibliografía acerca del tema.

Según sea la relación entre el tensión de corte y la tensión tangencial, es posible realizar una clasificación de los fluidos. Si la tensión tangencial es un múltiplo de la tensión de corte (la tensión de corte es la velocidad de cambio de la velocidad de las capas del fluido), donde el coeficiente multiplicativo es la viscosidad, entonces el fluido es denominado newtoniano, caso contrario se llamará no newtoniano. Ejemplos de fluidos newtonianos son: agua, benceno, alcohol, glicerina. Ejemplos de fluidos no newtonianos son: plasma de la sangre, chocolate, mayonesa, salsa de tomate, pasta dental, algunas grasas, aguas cloacales, y en general líquidos con partículas en suspensión.

Entre los fluidos no newtonianos tenemos los fluidos de Bingham, que son aquéllos cuya relación entre la tensión tangencial τ y la tensión de corte σ es lineal. Es decir,

$$\tau = \tau_0 + \eta\sigma. \tag{1.1}$$

donde η es la viscosidad y τ_0 es la tensión umbral.

Suponemos que el fluido es incompresible, laminar, y con densidad ρ constante. Fijado el sistema de coordenadas, donde la dirección y es la vertical, la x es la dirección de movimiento, y z la restante, se hacen las siguientes hipótesis:

1. El gradiente de presión se aplica en un solo sentido, es decir, $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0$.
2. El fluido es laminar, es decir, $v = w = 0$.
3. La componente no nula de la velocidad es sólo función del tiempo y de la componente vertical de la posición, es decir, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.
4. No hay intercambio de material entre la región viscosa y la región rígida, es decir, $u_y(s(t), t) = 0$.
5. El fluido tiene la condición de adherencia en las paredes de las placas, es decir, que la velocidad del fluido allí es cero.

Usando todas estas hipótesis simplificativas se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que llamaremos Problema (P). Haciendo un simple cambio de variables, podemos independizarnos de algunas constantes quedando:

$$u_t - u_{yy} = f(t), \qquad s(t) < y < 1, \ t > 0, \tag{1.2}$$

$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.3}$$

$$u(y,0) = u_0(y), \qquad s(0) = s_0,\ 0 < s_0 < y < 1, \tag{1.4}$$
$$u_y(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.5}$$
$$u_t(s(t),t) = f(t) - \frac{\tau_0}{s(t)}, \qquad t > 0. \tag{1.6}$$

Como vemos, en el sistema ha quedado un problema del tipo de conducción del calor, donde el término fuente es el gradiente de presión f que, según las hipótesis, depende sólo de la variable temporal. Este sistema es llamado un problema de frontera libre puesto que la función $s(t)$, que es la frontera que separa dos regiones, forma parte de las incógnitas. Para que haya desplazamientos de las capas del fluido, debemos suponer que el gradiente de presión supera la tensión umbral τ_0, es decir,

$$f(t) > \tau_0, \quad \forall\ t > 0. \tag{1.7}$$

También se puede colocar una condición más general en lugar de tener una condición de contorno fija (como en (1.3)), simulando la situación de dos fluidos de distinta naturaleza en contacto, quedando una ecuación alternativa:

$$u(1,t) = g(t), \qquad t > 0. \tag{1.8}$$

Se puede observar que tal función g no acarrea mayores problemas puesto que se puede reescribir el sistema considerando una nueva función para el gradiente de presión.

Un sencillo cálculo de derivación nos permite obtener el problema derivado, que nos será de utilidad más adelante.

Si $w = u_y$ se tiene el problema (P_y)

$$w_t - w_{yy} = 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, \tag{1.9}$$
$$w_y(1,t) = -f(t), \qquad t > 0, \tag{1.10}$$
$$w(y,0) = u_0'(y), \qquad s(0) = s_0,\ 0 < s_0 < y < 1, \tag{1.11}$$
$$w(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.12}$$
$$w_y(s(t),t) = -\frac{\tau_0}{s(t)}, \qquad t > 0. \tag{1.13}$$

2 Resultados previos

Si suponemos que el gradiente de presión tiende a un valor estacionario, es decir, $\lim_{t\to\infty} f(t) = f_0$, y suponemos u independiente del tiempo en (1.2)-(1.6), se puede obtener la solución estacionaria.

$$u_\infty(y) = -\frac{f_0}{2}\left(y^2 - 1\right) + f_0 s_\infty (y-1), \qquad s_\infty = \frac{\tau_0}{f_0}. \tag{2.1}$$

Elena Comparini probó en [1] la existencia y unicidad del problema (P) para todo tiempo, dependencia continua respecto de los datos, un resultado de monotonicidad y la convergencia asintótica, cuando el gradiente de presión tiende a un valor constante y cuando las condiciones iniciales cumplen ciertas hipótesis. Llamemos

$$u_0(1) = 0,\ u_0'(y) \le 0,\ u_0''(y) \le 0, \tag{A1}$$

$$u_0'(y) \geq -f_0 \left(y - \frac{\tau_0}{f_0} \right), \; u_0''(y) \geq -f_0. \tag{A2}$$

Proposición 2.1 *Si $s_0 > s_\infty$, (A1), (A2), $f' \geq 0$ y $u_0'''(y) \leq 0$ se tiene existencia y unicidad del problema (P) para todo tiempo y*

$$\begin{aligned}
s(t) &> s_\infty, \qquad t > 0, & (2.2)\\
0 &\leq u(y,t) \leq u_\infty(y), \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, & (2.3)\\
u_{\infty y}(y) &\leq u_y(y,t) \leq 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, & (2.4)\\
f(t) - f_0 &\leq u_t(y,t) \leq f(t) \leq f_0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, & (2.5)\\
s'(t) &< 0, \qquad t > 0. & (2.6)
\end{aligned}$$

Se observa además que la siguiente integral está acotada.

$$\int_0^\infty \left(\frac{s_\infty}{s(t)} - \frac{f(t)}{f_0} \right) dt. \tag{2.7}$$

Esto nos dice que el integrando converge a cero cuando t tiende a infinito, concluyendo que la frontera libre es, asintóticamente, inversamente proporcional al término fuente multiplicada por la tensión umbral.

$$s(t) \approx \frac{\tau_0}{f(t)}, \qquad t \to \infty. \tag{2.8}$$

3 Generalizaciones

En esta sección se generalizarán los resultados expuestos en [1]. Llamemos (B1) a:

$$f(t) \geq 0 \ \forall\ t \in [0,T], \qquad u_0(1) = 0, \qquad u_0'(y) \leq 0 \ \forall\ y \in [s_0, 1]. \tag{B1}$$

Notar que $(B1)$ dice que $u_0(y) \geq 0$.

Proposición 3.1 *Se puede ver que:*

1. *Si la hipótesis $(B1)$ se cumple, entonces*

$$\begin{aligned}
u(y,t) &\geq 0, & (3.1)\\
u_y(y,t) &\leq 0. & (3.2)
\end{aligned}$$

2. *Si se cumple $(B1)$, $u_0'''(y) \leq 0\ \forall\ y \in [s_0, 1]$ y $f'(t) \geq 0\ \forall\ t > 0$, entonces $s'(t) < 0$ para los t donde la solución exista y para los t tales que $s(t) > 0$.*

3. *Si u es solución de (1.2)-(1.6) se cumple la siguiente relación*

$$\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{\tau_0}{s(\tau)} \right] d\tau = u(s(t),t) - u_0(s_0). \tag{3.3}$$

para los t donde la solución exista.

Demostración: (1) y (2) son una consecuencia obvia del Principio del Máximo y el Lema de Hopf y (3) resulta de las ecuaciones de Green.

□

Observación 1 *Se observa que la acotación de la integral depende de la velocidad del fluido en la frontera libre. Pero ahora no podemos asegurar que el integrando tienda a cero, puesto que los experimentos numéricos del método que se propondrá a continuación revelaron que la velocidad del fluido en la frontera libre tiende a infinito.*

Proposición 3.2 *Supongamos que se cumple la hipótesis* $(B1)$*, que* $u_0^{'''}(y) \leq 0,\ \forall\ y \in [s_0, 1]$*, y que* $f^{'}(t) \geq 0,\ \forall\ t > 0$*. Entonces*

$$\begin{aligned} w_{yy}(y,t) &\leq 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, && (3.4)\\ w_y(y,t) &\leq 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, && (3.5)\\ w_t(y,t) &\leq 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, && (3.6)\\ s(t) &> \frac{\tau_0}{f(t)}, \qquad t > 0. && (3.7) \end{aligned}$$

siempre que $s(t) > 0$.

Demostración: La función $v \doteq w_{yy}$ resuelve el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} v_t - v_{yy} &= 0, \qquad s(t) < y < 1,\ t > 0, && (3.8)\\ v_y(1,t) &= -f^{'}(t) \leq 0, \qquad t > 0, && (3.9)\\ v(y,0) &= u_0^{'''}(y) \leq 0, \qquad 0 < s_0 < y < 1, && (3.10)\\ v(s(t),t) &= \frac{\tau_0 s^{'}(t)}{s(t)} \leq 0, \qquad t > 0. && (3.11) \end{aligned}$$

Por el lema de Hopf la solución no tiene máximo en $y = 1$. Luego es fácil ver por el Principio del Máximo que $v \leq 0$, lo cual nos dice que $w_{yy} \leq 0$. Como $w_{yy} = w_t$, entonces $w_t \leq 0$. También, como $w_{yy} \leq 0$ resulta que $w_y(y,t)$ es decreciente respecto de y para cada t. Luego el máximo de w_y está en la frontera libre. Como $w_y(s(t),t) = -\frac{\tau 0}{s(t)} \leq 0$ entonces $w_y \leq 0$. Otra consecuencia de ser w_y decreciente es que $w_y(s(t),t) \geq w_y(1,t)$, lo cual, reemplazando sus valores respectivos da que $s(t) > \frac{\tau_0}{f(t)}$. Esto concluye la demostración.

□

Teorema 3.3 *Sea* f *una función diferenciable que cumple* $f(t) > \tau_0\ \forall\ t > 0$, $f^{'}(t) \geq 0\ \forall\ t > 0$, $\lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = \infty$*. Asumimos también que se cumplen la hipótesis* $(C1)$ *conformada por estas cinco ecuaciones:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_0(1) = 0, \quad u_0^{'}(y) \leq 0\ \forall\ y \in [s_0, 1], \quad u_0^{''}(y) \leq 0\ \forall\ y \in [s_0, 1], & \\ s_0 > 0, \qquad u_0^{'''}(y) \leq 0\ \forall\ y \in [s_0, 1] \quad . & \end{array} \right. \tag{C1}$$

Luego existe única solución del problema (P_y) *para todo tiempo y además*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} s(t) = 0, \qquad s(t) > \frac{\tau_0}{f(t)}\ \forall\ t > 0. \tag{3.12}$$

Demostración: Llamamos problema (P_y^n) al sistema (P_y) salvo que el término $f(t)$ es reemplazado por $f_n(t)$, donde, para $n \in N$ y $\epsilon > 0$ arbitrario

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq n \\ \text{polinomio que empalme a } f \text{ en forma diferenciable}, & n < t < n+\epsilon \\ f(n+\epsilon), & t \geq n+\epsilon \end{cases} \tag{3.13}$$

Como la función f tiene límite infinito, a partir de un N en adelante se cumplen las hipótesis de existencia y unicidad de la Proposición (2.1), lo cual nos dice que cada problema (P_y^n) con $n \geq N$ tiene solución única para t arbitrariamente grande, cumpliéndose también que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} s^n(t) = \frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)}, \quad s^n(t) > \frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)}. \tag{3.14}$$

A la solución de este problema la llamamos $\{w^n, s^n\}$.

Sea T un número positivo arbitrario. Tomo n tal que $n \geq N$ y $n \geq T$. Luego el problema (P_y) coincide con el problema (P_y^n) en el intervalo $[0,T]$. Luego, de acuerdo al párrafo anterior, el problema (P_y) tiene única solución en el intervalo $[0,T]$ para todo T arbitrario. Esto me dice que el problema (P_y) admite solución para t arbitrariamente grande.

A partir de ahora consideraremos que $n \geq N$ para que se cumplan las hipótesis de existencia y unicidad. Llamamos $\{w^n, s^n\}$ solución de (P_y^n) para $n \geq N$ y llamaremos $\{w, s\}$ solución de (P_y). Probaremos que esa sucesión de soluciones converge a la solución general.

Por unicidad de la solución, y debido a que $f_n(t) = f(t)$ para $t \leq n$, se tiene que

$$\begin{cases} s^n(t) = s(t) & t \leq n \\ w^n(y,t) = w(y,t) & s(t) \leq y \leq 1, \; t \leq n \end{cases} \tag{3.15}$$

Esto dice que $\lim_{n \longrightarrow \infty} s^n(t) = s(t)$. Por un teorema de monotonía para problemas de este tipo, se sabe que si $f_n < f_{n+1}$ entonces $s^n > s^{n+1}$. Ver [1]. También sabemos que $\lim_{t \longrightarrow \infty} s^n(t) = \frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)}$ para todo n.

Sea $\epsilon_1 > 0$. Luego existe $N_1 \geq N$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $\frac{\tau_0}{f(n+\epsilon)} < \epsilon_1$. En particular $\frac{\tau_0}{f(N_1+\epsilon)} < \epsilon_1$. Luego existe M, un número real, tal que si $t \geq M$, entonces $s^{N_1}(t) < \epsilon_1$. Por monotonía, $s^n(t) < s^{N_1}(t) < \epsilon_1$ para $n \geq N_1$ y $t \geq M$. Dado $t \geq M$, tomo $n \geq t$, luego $s^n(t) = s(t)$, que da como resultado que $s(t) < \epsilon_1$. Notar que $s(t) > 0$, $\forall\, t > 0$. Haciendo uso de la Proposición (3.2) se obtiene por (3.7) el otro resultado que buscábamos. Esto concluye la demostración.

$\square$

4 Método de Diferencias Finitas con Paso Espacial Variable

Por simplicidad trabajaremos con el sistema (1.9)-(1.13). El método consiste en discretizar la ecuación principal. Fijado un paso de tiempo Δt, se construye una grilla de tal forma que la frontera libre pase por los nodos de ésta. En cada paso de tiempo se calcula un paso espacial Δy adecuado para tal fin. El algoritmo se ha construido para el caso cuando la frontera libre es decreciente. Para métodos similares ver [3], [6] y [7]. Definimos entonces Δt arbitrario y

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= 1-(\Delta y_1+...+\Delta y_i), \qquad i\geq 1, \quad y_1=1, &(4.1)\\
t_n &= (n-1)\,\Delta t, \qquad n\geq 1. &(4.2)
\end{aligned}
$$

Dividimos el intervalo $[s_0,1]$ en $m-1$ partes, donde m es un número natural arbitrario mayor o igual que tres. Definimos

$$\Delta y_i=\frac{1-s_0}{m-1}, \qquad i=1,...,m-1. \tag{4.3}$$

Con esta elección los puntos y_1,...,y_m son una partición de $[s_0,1]$ igualmente distribuida. Se ve claramente que $y_m=s_0$. De aquí en adelante construiremos Δy_m, Δy_{m+1}, ..., de manera tal que (y_{n+m-1},t_n) sea un punto de la frontera libre. Denotamos $w_{in}\doteq w(y_i,t_n)$. Realizamos aproximaciones mediante diferencias finitas para las derivadas y reemplazando en (1.9)-(1.13) queda lo que llamamos problema (Pd_y):

$$w_{1,n+1}-w_{2,n+1}=-\Delta y_i f_{n+1}, \qquad n\geq 1, \tag{4.4}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}}w_{i-1,n+1} &- \left(\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}}+\frac{\Delta t}{\Delta y_i}+\Delta y_i\right)w_{i,n+1}+\frac{\Delta t}{\Delta y_i}w_{i+1,n+1}=\\
&= -\Delta y_i w_{i,n}, \qquad i=2...n+m-1,\ n\geq 1, \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

$$w_{n+m,n+1}=0, \qquad n\geq 1, \tag{4.6}$$

$$w_{i1}=u_0^{'}(y_i), \qquad i=1,...,m, \tag{4.7}$$

$$\Delta y_{n+m-1}=\left(\frac{w_{n+m-1,n+1}}{w_{n+m-1,n+1}-\tau_0}\right)y_{n+m-1}, \qquad n\geq 1. \tag{4.8}$$

La idea del proceso es la siguiente:

1. Elegidos y_1,...,y_m, se puede calcular $\{w_{i1}\}_{i=1}^{m}$ mediante la ecuación (4.7). De este modo el primer paso quedaría resuelto.

2. Hasta el momento sólo disponemos de Δy_1,...,Δy_{m-1}. Si pudiéramos conocer el valor de Δy_m, entonces utilizando el sistema (4.4)-(4.6) para $n=1$, entonces sería posible calcular $\{w_{i2}\}_{i=1}^{m+1}$. Luego nos dedicaremos a calcular Δy_m.

3. Esto nos permite realizar un paso inductivo. Supongamos conocidos los valores $\{w_{in}\}_{i=1}^{n+m-1}$ y Δy_1,..., Δy_{n+m-2}. Si supiéramos cuánto vale Δy_{n+m-1}, entonces podríamos resolver el sistema lineal (4.4)-(4.6) y obtener $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$.

Como vemos, lo único que nos queda es tratar de encontrar el valor de Δy_{n+m-1}, de tal forma que sea consistente con la ecuación (4.8). Lo que proponemos es lo siguiente:

1. Dar un valor inicial $\Delta y^{(1)}_{n+m-1}$ tal que $0 < \Delta y^{(1)}_{n+m-1} < y_{n+m-1}$.

2. Calcular una iteración interna en r determinada por la ecuación (4.8), es decir,

$$\Delta y^{(r+1)}_{n+m-1} = \left(\frac{w^{(r)}_{n+m-1,n+1}}{w^{(r)}_{n+m-1,n+1} - \tau_0} \right) y_{n+m-1}, \qquad n \geq 1. \tag{4.9}$$

   donde $w^{(r)}_{n+m-1,n+1}$ se calcula resolviendo (4.4)-(4.6) usando Δy_1,...,Δy_{n+m-2}, $\Delta y^{(r)}_{n+m-1}$.

Si la sucesión $\{\Delta y^{(r)}_{n+m-1}\}$ fuera convergente a un número $\Delta y_{n+m-1} > 0$, resolveríamos (4.4)-(4.6) usando Δy_1,...,Δy_{n+m-2}, Δy_{n+m-1}, lo cual nos daría $\{w_{i,n+1}\}_{i=1}^{m+n}$, y de esta manera quedaría resuelto el problema para el nivel $n+1$.

Proposición 4.1 *Sea A una matriz cuadrada tridiagonal, donde los elementos de la diagonal principal y las dos adyacentes son todos distintos de cero. Entonces A es una matriz irreducible, es decir, el sistema no puede desacoplarse.*

Demostración: Ver [12].

□

Proposición 4.2 *Si $\Delta t > 0$ y Δy_1,...,Δy_{n+m-1} son números positivos, entonces la matriz del sistema lineal formado por las ecuaciones (4.4)-(4.6) es no singular.*

Demostración: Claramente la matriz del sistema es diagonalmente dominante en sentido fuerte. Usando la proposición anterior se observa que esta matriz es también irreducible. Como un corolario del Segundo Teorema de Gershgorin resulta que la matriz es invertible.

□

Ahora despejaremos explícitamente la solución del sistema lineal (4.4)-(4.6) con el objeto de obtener propiedades de la solución.

De la ecuación (4.4) se deduce que:

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} - \Delta y_1 f_{n+1}. \tag{4.10}$$

Caso $i = 2$: Reemplazamos por el valor de $w_{1,n+1}$ y despejamos $w_{2,n+1}$, quedando:

$$w_{2,n+1} = \frac{-\dfrac{\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2} w_{3,n+1}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}. \tag{4.11}$$

Notemos que

$$w_{2,n+1} = a_{2,n+1} + b_{2,n+1} w_{3,n+1}, \tag{4.12}$$

donde

$$a_{2,n+1} = \frac{\frac{-\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \qquad b_{2,n+1} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta y_2^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \tag{4.13}$$

donde

$$a_{2,n+1} = a_{2,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2, f_{n+1}, w_{2n}\right), \quad b_{2,n+1} = b_{2,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2\right), \quad 0 < b_{2,n+1} < 1. \tag{4.14}$$

Caso $i = k$, donde $3 \leq k \leq n+m-2$: Reemplazamos por el valor de $w_{k-1,n+1}$ y despejamos $w_{k,n+1}$, quedando:

$$w_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k} a_{k-1,n+1} + w_{kn} + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2} w_{k+1,n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}\left(1 - b_{k-1,n+1}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}. \tag{4.15}$$

Notemos que:

$$w_{k,n+1} = a_{k,n+1} + b_{k,n+1} w_{k+1,n+1}, \tag{4.16}$$

donde

$$a_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k} a_{k-1,n+1} + w_{kn}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}\left(1 - b_{k-1,n+1}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}, \tag{4.17}$$

$$b_{k,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{k-1}\Delta y_k}\left(1 - b_{k-1,n+1}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y_k^2}}, \tag{4.18}$$

donde

$$a_{k,n+1} = a_{k,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2, ..., \Delta y_k, f_{n+1}, w_{2n}, ..., w_{kn}\right), \tag{4.19}$$

$$b_{k,n+1} = b_{k,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2, ..., \Delta y_k\right), \tag{4.20}$$

$$0 < b_{k,n+1} < 1. \tag{4.21}$$

Caso $i = n+m-1$: Siguiendo el mismo procedimiento de antes, queda:

$$w_{n+m-1,n+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}}\left(1 - b_{n+m-2,n+1}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^2}}, \tag{4.22}$$

donde

$$w_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}, \tag{4.23}$$

donde

$$a_{n+m-1,n+1} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}}\left(1 - b_{n+m-2,n+1}\right) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^2}}, \tag{4.24}$$

donde

$$a_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2, ..., \Delta y_{n+m-1}, f_{n+1}, w_{2n}, ..., w_{n+m-1,n}\right). \tag{4.25}$$

Proposición 4.3 *Los* $\{b_{i,n+1}\}_{i=2}^{n+m-2}$ *no dependen de* n.

Demostración: Es una simple observación de (4.13), (4.14), (4.18), (4.20) para $3 \leq k \leq n + m - 2$.

□

Usando la proposición anterior, y resumiendo todas las fórmulas, queda:

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} - \Delta y_1 f_{n+1}, \tag{4.26}$$

$$w_{i,n+1} = a_{i,n+1} + b_i w_{i+1,n+1}, \qquad i = 2, ..., n + m - 2, \tag{4.27}$$

$$w_{n+m-1,n+1} = a_{n+m-1,n+1}. \tag{4.28}$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$a_{2,n+1} = \frac{\dfrac{-\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + w_{2n}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \tag{4.29}$$

$$a_{i,n+1} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}\Delta y_i} a_{i-1,n+1} + w_{in}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}\Delta y_i}\left(1 - b_{i-1}\right) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}, \qquad i = 3, ..., n + m - 1, \tag{4.30}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2}}, \tag{4.31}$$

$$b_i = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{i-1}\Delta y_i}\left(1 - b_{i-1}\right) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2}}, \qquad i = 3, ..., n + m - 2. \tag{4.32}$$

Y los coeficientes son función de las siguientes variables:

$$a_{i,n+1} = a_{i,n+1}\left(\Delta t, \Delta y_2, ..., \Delta y_i, f_{n+1}, w_{2n}, ..., w_{in}\right), \quad i = 2, ..., n+m-1, \tag{4.33}$$
$$b_i = b_i\left(\Delta t, \Delta y_2, ..., \Delta y_i\right), \quad i = 2, ..., n+m-2, \tag{4.34}$$
$$0 < b_i < 1, \quad i = 2, ..., n+m-2. \tag{4.35}$$

Proposición 4.4 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, $f(t) > 0 \ \forall \ t$, y que Δt, $\Delta y_1 ...$, Δy_{n+m-1} son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n. Asumiendo que $w_{in} \leq 0$, $i = 1, ..., n+m-1$, entonces $a_{i,n+1} < 0$, $i = 2, ..., n+m-1$.*

Demostración: Lo que dice esta proposición es que si en el nivel n las incógnitas son no negativas, entonces los coeficientes resultan todos negativos, lo cual, como se verá más adelante, nos será útil para averiguar el signo de la solución en el nivel $n+1$.

La demostración consiste en un sencillo paso inductivo. Si observamos la ecuación (4.29) es claro que $a_{2,n+1} < 0$. Si suponemos ahora que $a_{i-1,n+1} < 0$, con la ayuda de (4.30) y (4.35) se obtiene que $a_{i,n+1} < 0$, donde $i = 3, ..., n+m-1$.

□

Proposición 4.5 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, $f(t) > 0 \ \forall \ t$, y que Δt, $\Delta y_1 ...$, Δy_{n+m-1} son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n. Asumiendo que $w_{in} \leq 0$, $i = 1, ..., n+m-1$, entonces $w_{i,n+1} < 0$, $i = 1, ..., n+m-1$.*

Demostración: Se realiza un sencillo paso inductivo hacia atrás. Por la fórmula (4.28) y la Proposición (4.4) se observa que $w_{n+m-1,n+1} < 0$. Supongamos que $w_{i+1,n+1} < 0$, entonces, usando la ecuación (4.27) se tiene que

$$w_{i,n+1} = a_{i,n+1} + b_i w_{i+1,n+1} < 0. \tag{4.36}$$

Observación 2 *Si comenzamos con la condición inicial sobre u_0' determinada por $(B1)$, resulta que los $w_{i,n+1}$ son todos números negativos, coincidiendo con el resultado teórico expresado en (3.2).*

Proposición 4.6 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que $f(t) > 0 \ \forall \ t$, que Δt, $\Delta y_1 ...$, Δy_{n+m-1} son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel n,que $w_{in} \leq 0$, $i = 1, ..., n+m-1$, y que $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + ... + \Delta y_{n+m-2})$ es un número en el intervalo $(0, 1)$. Entonces si comenzamos la iteración interna propuesta en (4.9) con un valor inicial $\Delta y_{n+m-1}^{(1)}$ que cumpla $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(1)} < y_{n+m-1}$, se genera una sucesión en r, bien definida.*

Demostración: Mediante el uso de la Proposición (4.5), y mediante la ecuación que define la iteración, es decir, la fórmula (4.9), resulta que $0 < \Delta y_{n+m-1}^{(r)} < y_{n+m-1} \ \forall \ r$.

□

Definición 4.7 *Definimos los siguientes números:*

$$A_{in} = \frac{w_{i,n} - w_{i+1,n}}{\Delta y_i}, \qquad i = 1, ..., n+m-2, \ n \geq 1, \tag{4.37}$$
$$B_{in} = \frac{w_{in} - w_{i,n-1}}{\Delta t}, \qquad i = 1, ..., n+m-2, \ n \geq 1. \tag{4.38}$$

Proposición 4.8 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que* $f(t) > 0\ \forall\ t$, *que* Δt, $\Delta y_1 ...$, Δy_{n+m-1} *son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel* n, *que* $w_{in} \leq 0$, $i = 1, ..., n+m-1$, *que* $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + ... + \Delta y_{n+m-2})$ *es un número en el intervalo* $(0,1)$. *Asumiendo que* $A_{in} \leq 0$, $i = 1, ..., n+m-2$, *entonces* $A_{i,n+1} < 0$, $i = 1, ..., n+m-1$.

Demostración: Recordando que las w_{in} cumplían las ecuaciones (4.4)-(4.6) se observa que $\{A_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ satisfacen el siguiente sistema lineal:

$$A_{1,n+1} = -f_{n+1}, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} A_{i-1,n+1} \quad & - \quad \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta y_i^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}\right) A_{i,n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}} A_{i+1,n+1} = \\ & = \quad -A_{in}, \qquad i = 2, ..., n+m-2, \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$A_{n+m-1,n+1} = \frac{w_{n+m-1,n+1}}{\Delta y_{n+m-1}}. \tag{4.41}$$

Por hipótesis, $A_{1,n+1} < 0$. Además, por la Proposición (4.5) se ve que $A_{n+m-1,n+1} < 0$. Despejando explícitamente los $\{A_{i,n+1}\}_{i=2}^{n+m-2}$, se obtiene que:

$$A_{i,n+1} = Q_{i,n+1} + R_{i,n+1} A_{i+1,n+1}, \qquad i = 2, ..., n+m-2, \tag{4.42}$$

donde

$$Q_{2,n+1} = \frac{\dfrac{-\Delta t}{\Delta y_2} f_{n+1} + A_{2n}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}, \quad R_{2,n+1} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2^2} + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_2 \Delta y_3}}, \tag{4.43}$$

$$Q_{i,n+1} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2} Q_{i-1,n+1} + A_{in}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2}(1 - R_{i-1,n+1}) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}, \qquad i = 3, ..., n+m-2, \tag{4.44}$$

$$R_{i,n+1} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i^2}(1 - R_{i-1,n+1}) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}}, \qquad i = 3, ..., n+m-2. \tag{4.45}$$

Notar que $Q_{2,n+1} < 0$ y $0 < R_{2,n+1} < 1$. Suponiendo que $Q_{i-1,n+1} < 0$ y $0 < R_{i-1,n+1} < 1$, y mirando (4.44) y (4.45) es fácil ver que $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_{i,n+1} < 1$. Luego, como estamos haciendo un paso inductivo, resulta $Q_{i,n+1} < 0$ y $0 < R_{i,n+1} < 1$, $i = 2, ..., n+m-2$.

Suponiendo ahora que $A_{i+1,n+1} < 0$, observando (4.42) y debido a lo dicho en el párrafo anterior, resulta que $A_{i,n+1} < 0$. Luego, como estamos frente a un paso inductivo, tenemos que $A_{i,n+1} < 0$, $i = 2, ..., n+m-2$. Con esto queda demostrada la proposición.

□

Proposición 4.9 *Supongamos que el gradiente de presión es positivo, es decir, que* $f(t) > 0 \ \forall\ t$*, que* $f^{'}(t) > 0 \ \forall\ t$*, que* $\Delta t,\ \Delta y_1 ...,\ \Delta y_{n+m-1}$ *son números positivos, es decir, que el método está bien definido hasta el nivel* n*, que* $w_{in} \leq 0,\ i = 1, ..., n+m-1$*, que* $y_{n+m-1} = 1 - (\Delta y_1 + ... + \Delta y_{n+m-2})$ *es un número en el intervalo* $(0,1)$*. Asumiendo que* $B_{in} \leq 0,\ i = 1, ..., n+m-2$*, entonces* $B_{i,n+1} < 0,\ i = 1, ..., n+m-1$*.*

Demostración: Análoga a la demostración de la Proposición (4.8).

□

Observación 3 *Hay que destacar que los números* $\{A_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ *son aproximaciones numéricas de* w_y*. Luego, el resultado de la Proposición (4.8) confirma los resultados teóricos, expresados en la Proposición (3.2), ecuación (3.5). Además, los números* $\{B_{i,n+1}\}_{i=1}^{n+m-1}$ *son aproximaciones numéricas de* w_t*. Luego, el resultado de la Proposición (4.9) confirma los resultados teóricos, expresados en la Proposición (3.2), ecuación (3.6).*

Hasta este punto, la iteración interna propuesta es muy cara computacionalmente, puesto que cada iteración interna involucra la resolución de un sistema lineal de tamaño considerable a medida que el tiempo transcurre. Lo que haremos es simplificar los cálculos para que eso se reduzca notablemente.

Supongamos que el algoritmo está definido hasta el tiempo t_n. Sabemos que:

$$\Delta y_{n+m-1}^{(r+1)} = \left(\frac{w_{n+m-1}^{(r)}}{w_{n+m-1}^{(r)} - \tau_0}\right) y_{n+m-1}, \tag{4.46}$$

$$w_{n+m-1,n+1}^{(r+1)} = \frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}^{(r)}} a_{n+m-2,n+1} + w_{n+m-1,n}}{1 + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-2}\Delta y_{n+m-1}^{(r)}}(1 - b_{n+m-2}) + \dfrac{\Delta t}{\Delta y_{n+m-1}^{(r)} 2}}. \tag{4.47}$$

Es claro que $w_{n+m-1,n} = 0$ ya que así se requirió en el nivel anterior o bien porque las condiciones iniciales son compatibles entre sí. Por simplicidad, renombramos algunas cosas y analizamos sus signos, quedando,

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta t\ a_{n+m-2,n+1}}{\Delta y_{n+m-2}} < 0, \qquad \mathbf{c} = \frac{\Delta t(1 - b_{n+m-2})}{\Delta y_{n+m-2}} > 0. \tag{4.48}$$

$$\Delta y^{(r)} = \Delta y_{n+m-1}^{(r)} > 0, \qquad w^{(r)} = w_{n+m-1,n+1}^{(r)} < 0, \qquad y = y_{n+m-1}. \tag{4.49}$$

Reemplazando (4.47) en (4.46) y haciendo uso de los símbolos escritos en (4.48) y (4.49) se llega a la siguiente expresión:

$$\Delta y^{(r+1)} = \frac{\mathbf{a}y}{\mathbf{b} - \tau_0 \Delta y^{(r)} - \dfrac{\Delta t}{\Delta y^{(r)}}\tau_0}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{c}\tau_0. \tag{4.50}$$

Estas últimas fórmulas nos dicen que el Δy es un punto fijo de la función

$$F(x) = \frac{\mathbf{a}x}{\mathbf{b} - \tau_0 x - \dfrac{\Delta t}{x}\tau_0}, \tag{4.51}$$

cuyo gráfico nos muestra que tiene a lo sumo dos puntos fijos, el $x = 0$ y/o un punto fijo positivo. Luego, el algoritmo se reformula, de tal forma que mediante el cálculo recursivo de algunos coeficientes se pueda trabajar directamente sobre la función F sin tener que resolver sistemas lineales. El número de iteraciones se reduce notablemente. Si ese punto fijo positivo es contractivo, es claro que satisface (4.8), con lo cual el método queda bien definido. Hay que destacar el hecho de que en numerosos experimentos numéricos el punto fijo resulta contractivo.

5 Resultados numéricos

El algoritmo fue programado en Matlab en su totalidad. En todos los ensayos que se realizaron se comprobó que los resultados numéricos coincidían con los resultados teóricos. Como muestra la Proposición (3.3), si graficáramos la frontera libre se observaría que ésta converge a cero de manera monótona cuando el tiempo tiende a infinito.

- **Caso 1:** $s_0 = 0.8$, $\tau_0 = 1$, $f(t) = 2 - \frac{1}{(t+1)^3}$, $v_0'(y) = 0$.
- **Caso 2:** $s_0 = 0.8$, $\tau_0 = 1$, $f(t) = 2 + t$, $v_0'(y) = 0$.

Referencias

[1] Comparini E., *A One Dimensional Bingham Flow*, Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 1992, 127-139.

[2] Crank J., *Free and Moving Boundary Problems*, Claredon Press, Oxford (1984).

[3] Douglas J., Jr. & Gallie T. M., Jr., *On the Numerical Integration of a Parabolic Equation Subject to a Moving Boundary Condition*, Duke Math. J., 22 (1955), pp. 557-571.

[4] Duvaut G. & Lions J. L., *Inequalities in Mechanics and Physics*, vol. 219, Springer Verlag, 1976.

[5] Glowinky-Lions Tremolieres, *Analyse Numerique des Inequalities Variationales*, vol. 1,2, Dumomd, 1976.

[6] Gupta R. S. & Kumar D., *Variable Time Step Methods for One-Dimensional Stefan Problem with Mixed Boundary Condition*, Int. J. Heat Mass Transfer., vol 24, pp. 251-259, 1981.

[7] Murray W. D. & Landis F., *Numerical and Machine Solutions of Transient Heat-Conduction Problems Involving Melting or Freezing*, J. Heat Transfer. 81C, pp. 106-112, 1959.

[8] Primicerio M., *Problemi di Diffusione a Frontiera Libera*, Bolletino U.M.I. (5) 18-A (1981), 11-68.

[9] Rubinstein L.I., *The Stefan Problem*, Trans. Math. Monographs-vol. 27, Amer Math. Soc. ,Providence 1971.

[10] Tarzia D. A., *Introducción a las Inecuaciones Variacionales Elípticas y sus Aplicaciones a los Problemas de Frontera Libre*, CLAMI, 1981.

[11] Tarzia D., *A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems*, MAT - Serie A, 2 (2000).

[12] Trefethen L. N. & Bau D., *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1997, pp. 227-228.

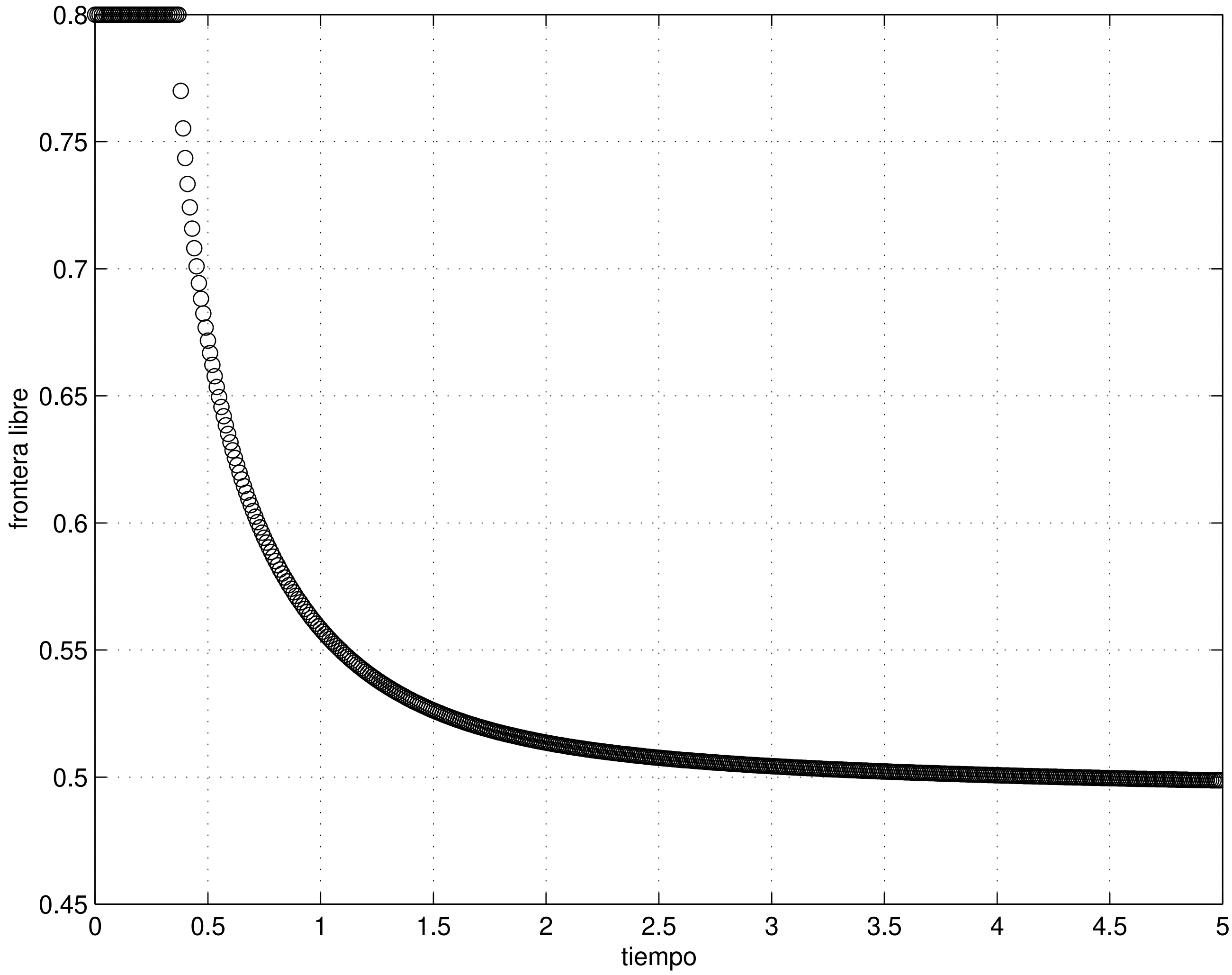

Figura 1: Caso 1.

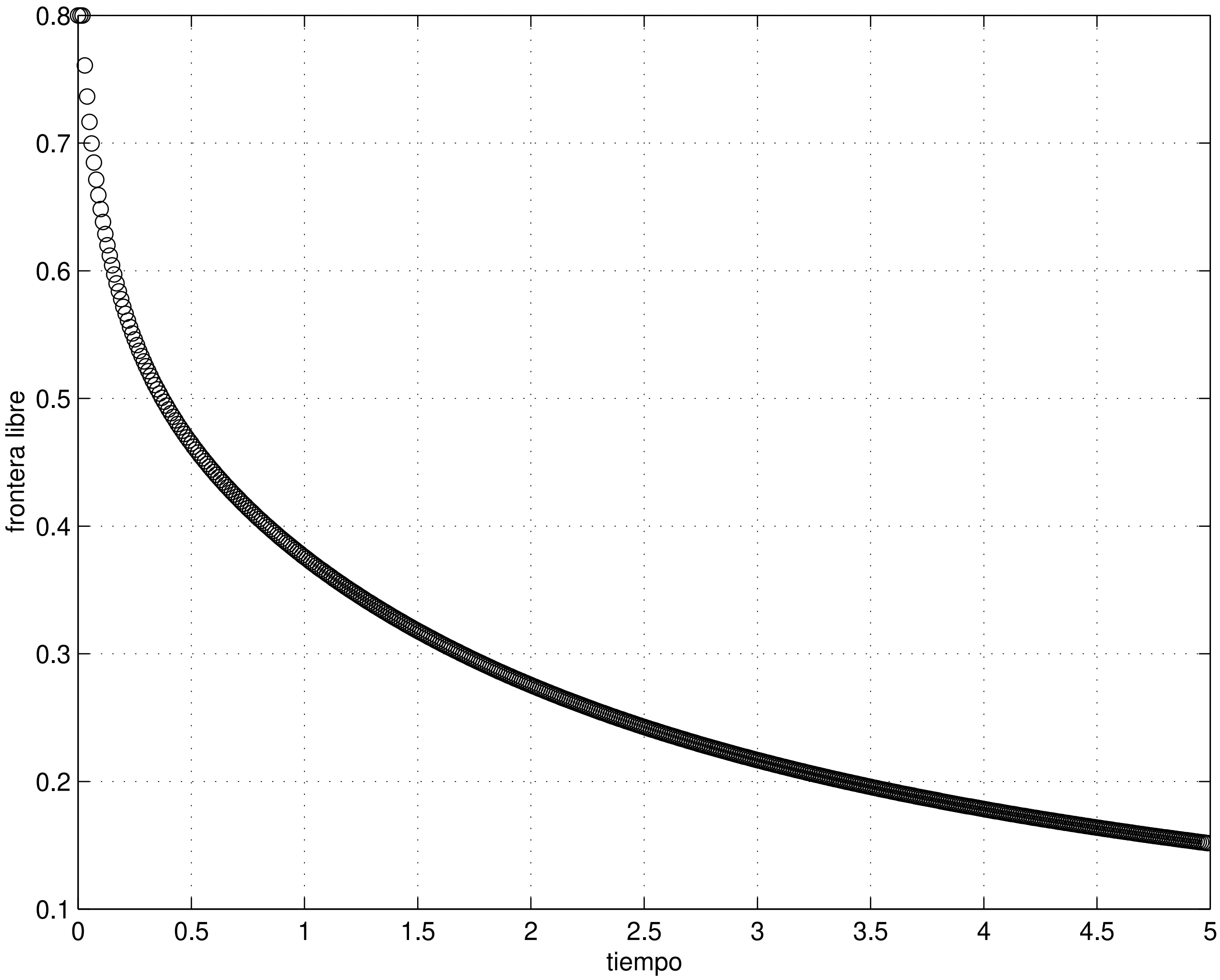

Figura 2: Caso 2.