

MAT

Serie 

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN: 1515-4904

10

*Segundas Jornadas
sobre Ecuaciones
Diferenciales,
Optimización y
Análisis Numérico*

*Domingo A. Tarzia
Cristina V. Turner (Eds.)*

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
Diciembre 2005

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 10

SEGUNDAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Domingo A. Tarzia – Cristina V. Turner (Eds.)

INDICE

Marcos Gaudiano – Cristina Turner, “Difusión de un solvente en un polímero vidrioso con una condición de contorno del tipo creciente en el tiempo”, 1-9.

Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “A one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 11-16.

Eduardo A. Santillan Marcus - Domingo A. Tarzia, “Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad”, 17-22.

Rosario, Diciembre 2005

Difusión de un Solvente en un Polímero Vidrioso con un Condición de Contorno del Tipo Creciente en el Tiempo.

Marcos Gaudiano* y Cristina Turner †

FAMAF-UNC-CIEM-CONICET. Medina Allende s/n, c.p.:5000, Córdoba, Argentina.

Resumen

Aquí se aborda un problema de frontera libre unidimensional surgido en la industria del polímero. Se establece la existencia y unicidad de la solución, y un método numérico basado en diferencias finitas que la calcula, el cual permite observar interesantes comportamientos asintóticos de la frontera libre y la concentración del solvente en el polímero.

1 Introducción.

Supongamos una barra unidimensional semi-infinita, de cierto tipo de polímero, en contacto en un extremo con una concentración desolvente variable en el tiempo $G(t)$. Una vez superado un umbral q de concentración en el borde, el solvente penetra el material de manera tal que, en cada instante de tiempo, pueden observarse dos partes bien delimitadas: una parte mojada donde la concentración de solvente, que llamaremos $u(x, t)$ se difunde obedeciendo la ecuación del calor, y otra seca donde se asume que $u(x, t) = 0$ y que está separada de la región anterior, por un punto $s(t)$, que es función del tiempo y se denomina frontera libre. Problemas de este tipo han sido tratados en [1], [4], [5] y [6].

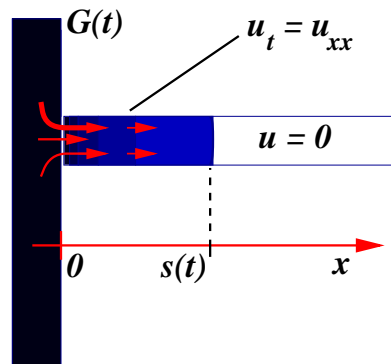


Figura 1: Situación física.

Llamemos $u(x, t)$ a la concentración del solvente. El modelo propuesto en [2] establece que para polímeros del tipo vidrioso, la velocidad con que se mueve $s(t)$ depende solamente del exceso de concentración respecto del valor umbral en el punto mismo, lo que se escribe como:

$$\dot{s}(t) = f(u(s(t), t) - q),$$

*gaudiano@mate.uncor.edu

†turner@mate.uncor.edu

donde f es una función que más adelante definiremos. Además, sobre $s(t)$ se debe cumplir la *Ley de Fick*, la cual establece que el flujo de solvente debe ser proporcional al negativo del gradiente de la concentración, que en este contexto es:

$$u_x(s(t), t) = -\kappa \dot{s}(t)u(s(t), t),$$

donde $\kappa > 0$.

Por conveniencia, realizaremos el cambio de variable $c = u - q$ y $g = G - q$. La función $c(x, t)$, no es más que el exceso de concentración para que se produzca la difusión sobre el material. Se puede normalizar para que $g(0) = 1$ y obtener la siguiente formulación del problema.

Problema PS

Dado un $T > 0$ encontrar una función c y una curva s con $s \in C^1[0, T]$, $c \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, $D_T = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < s(t)\}$ y c_x continua hasta $s(t)$ tales que:

$$c_{xx} - c_t = 0 \quad \text{en} \quad D_T, \quad (1.1)$$

y para $0 \leq t \leq T$:

$$c(0, t) = g(t), \quad (1.2)$$

$$\dot{s}(t) = f(c(s(t), t)), \quad (1.3)$$

$$c_x(s(t), t) = -\dot{s}(t)(c(s(t), t) + q), \quad (1.4)$$

con

$$s(0) = 0. \quad (1.5)$$

Ahora una aclaración importante: como una concentración por definición química es una función acotada, el problema **PS** así planteado podría no tener un correlato físico directo, puesto que si $g'(t) \geq 0$ uno no debería esperar que $c(x, t)$ sea acotada $\forall(x, t)$. Sin embargo, cuando $g(t) \rightarrow \infty$ se encuentra que este problema posee interesantes comportamientos asintóticos. Por eso es que asumiremos a f como una función perteneciente a $C[0, \infty)$, con derivada positiva y continua en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$. En química se encuentra generalmente que $f(c) = \alpha c^m$, con $\alpha, m > 0$. Notar que existe $\Phi = f^{-1}$ y tiene las mismas propiedades que f . También requerimos que $g \in C^1[0, \infty)$ y que $g' \geq 0$.

2 Un problema Auxiliar.

Para la demostración de la existencia y unicidad de una solución a **PS**, se considera primero un problema más simple: quitando la ecuación (1.3) y poniendo como dato también a una curva $r(t)$ se tiene el siguiente **problema auxiliar PA**:

Dada $r \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T)$ tal que:

$$r(0) = 0, \quad (2.6)$$

$$\dot{r}(0) = f(1), \quad (2.7)$$

$$0 \leq \dot{r} \leq f(g(T)) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

$$|\ddot{r}| \leq K \quad 0 < t < T, \quad (2.9)$$

encontrar un $c \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ con c_x continua hasta $x = r(t)$, $t \in (0, T)$, tal que en $D = \{(x, t) : 0 < x < r(t), 0 < t < T\}$ cumpla:

$$c_{xx} - c_t = 0 \quad (2.10)$$

y $\forall t \in (0, T)$

$$c(0, t) = g(t), \quad (2.11)$$

$$c_x(r(t), t) = -\dot{r}(t)(\Phi(\dot{r}(t)) + q). \quad (2.12)$$

Este problema tiene única solución, la prueba se la puede encontrar en [4].

Proposición 2.1 Tomando T suficientemente pequeño la solución de **PA** satisface:

$$c_0 \leq c(x, t) < g(t) \quad 0 < x \leq r(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.13)$$

$$-c_{0x} \leq c_x(x, t) < 0 \quad 0 < x < r(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.14)$$

Donde c_0 y c_{0x} son constantes positivas y dependen sólo de T .

Demostración. Sea $c^1(x, t)$ la solución de **PA** para $g = 1$. En [1] se prueba que $c^1(x, t)$ verifica la ecuación (2.13). Dado que $(c - c^1)_x(r, t) = 0 \forall t$, el principio del máximo establece que el máximo y el mínimo de $c - c^1$ se asumen sobre $x = 0$. Puesto $(c - c^1)(0, t) = g(t) - 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (c - c^1)(x, t) < g(t) - 1 \\ c_0 \leq c^1(x, t) &\leq c(x, t) < c^1(x, t) - 1 + g(t) < g(t), \end{aligned}$$

obteniendo (2.13). Como $c_{xx}(0, t) = c_t(0, t) = g'(t) \geq 0$, $\max_x c_x = \max_r c_x < 0$. Para probar el lado izquierdo de (2.14) observemos que $v(x, t) = e^{-2t}(x+1)c_x(x, t)$ satisface el problema:

$$\begin{aligned} Lv &= v_{xx} - \frac{2}{x+1}v_x + \left[\frac{2}{(x+1)^2} - 2 \right] v - v_t = 0 \quad \text{en } D \\ v(0, t) - v_x(0, t) &= -e^{-2t}g'(t) \\ v(r, t) &= -e^{-2t}(r+1)\dot{r}(q + \Phi(\dot{r})) \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Supongamos que $\min_{\bar{D}} v = v(x_0, t_0) < 0$. Si $x_0 = r(t_0)$ entonces

$$v(x_0, t_0) = -e^{-2t_0}(r(t_0) + 1)\dot{r}(t_0)(\Phi(\dot{r}(t_0)) + q) \geq -(f(1)t_0 + 1)f(1)(1 + q)$$

Si $x_0 > 0$ y (x_0, t_0) no está sobre la curva r , entonces $v_{xx}(x_0, t_0) \geq 0$, $v_x(x_0, t_0) = 0$ y $v_t(x_0, t_0) \leq 0$, luego $Lv(x_0, t_0) > 0$, que es falso. Si por último $x_0 = 0$, entonces $v_x(0, t_0) \geq 0$ y:

$$v(x, t) \geq v(0, t_0) = v_x(0, t_0) - e^{-2t_0}g'(t_0) \geq -e^{2t_0}g'(t_0),$$

luego

$$v(x, t) \geq -\max(e^{2t_0}g'(t_0), (f(1)t_0 + 1)f(1)(1 + q))$$

con lo que:

$$c_x(x, t) \geq -\max_{(x,t) \in \bar{D}} \left\{ \frac{e^{2t}}{x+1} \max_{0 \leq \tau \leq t} [\max(e^{2\tau}g'(\tau), (f(1)\tau + 1)f(1)(1 + q))] \right\}$$

■

Proposición 2.2 La solución de **PA** cumple que $c \in C^{2,1}(\bar{D})$, $c_{xt} \in C(\bar{D} - \{(0, 0)\})$ y :

$$|c_t(x, t)| \leq m + Mt \quad \forall (x, t) \in D, \quad (2.15)$$

donde $m = \max_{[0, T]} |g'|$ y M depende de T y K .

Demostración. Notemos que siempre es posible disminuir T para que $\dot{r}(t) = f(1) + \int_0^t \ddot{r} \geq f(1) - KT > 0 \forall t \in [0, T]$. $w = (c - c^1)_t$ satisface el problema:

$$w_{xx} - w_t = 0 \quad \text{en } D, \quad (2.16)$$

$$w(0, t) = g'(t) \quad 0 < t < T, \quad (2.17)$$

$$w_x(r, t) + \dot{r}(t)w(r(t), t) = 0 \quad 0 < t < T. \quad (2.18)$$

Sea $t^* \geq 0$. Si se cumple $\max w = w(r(t^*), t^*)$ entonces

$$\max w = -\frac{w_x(r(t^*), t^*)}{\dot{r}(t^*)} \leq 0$$

De igual forma, si $\min w = w(r(t^*), t^*)$ se obtiene que $\min w \geq 0$, luego por el principio del máximo

$$|w| \leq \max_{x=0} |w| = m,$$

y (2.15) se obtiene finalmente de la ecuación (2.11) de [1]. ■

Proposición 2.3 *Bajo todas las suposiciones anteriores, existen constantes $N > 0$ y $T_0 > 0$, tales que si $T \in (0, T_0)$ y c_i es la solución de **PA** para r_i , $i = 1, 2$ resulta:*

$$|c_1(r_1, t) - c_2(r_2, t)| \leq N \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} T \quad 0 < t < T. \quad (2.19)$$

Demostración. Llamemos $\lambda = \min(r_1, r_2)$ y $\mu = \max(r_1, r_2)$.

Llamemos V a la solución del problema

$$V_{xx} - V_t = 0 \quad \text{en } D^* \quad (2.20)$$

$$V(0, t) = 0 \quad 0 < t < T \quad (2.21)$$

$$V_x(\lambda, t) = (A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \quad 0 < t < T, \quad (2.22)$$

donde $D^* = \{0 < x < \lambda, 0 < t < T\}$ y $A = m + q + g(T) \left(1 + \max_{[f(1)-KT, f(g(T))]} \Phi'\right)$.

Supongamos que $\lambda = r_1$ y $\mu = r_2$, y observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & |c_{1x}(\lambda, t) - c_{2x}(\lambda, t)| = |c_{1x}(r_1, t) - c_{2x}(r_2, t) + c_{2x}(r_2, t) - c_{2x}(r_1, t)| \\ & \leq |-\dot{r}_1(\Phi(\dot{r}_1) + q) + \dot{r}_2(\Phi(\dot{r}_2) + q)| + (m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \\ & \leq (q + m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + |\dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_1) - \dot{r}_1 \Phi(\dot{r}_1)| + |\dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_2) - \dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_1)| \\ & \leq (q + m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \left(g(T) + g(T) \max_{[f(1)-KT, f(g(T))]} \Phi'\right) \\ & = V_x(\lambda, t) \end{aligned}$$

Como $(V - (c_1 - c_2))_x \geq 0$ sobre λ , por el principio del máximo obtenemos

$$0 = \min_{x=0} (V - (c_1 - c_2)) \leq V - (c_1 - c_2) \quad \text{en } D^*.$$

De manera análoga se obtiene $-V \leq c_1 - c_2$ en D^* . De modo que

$$|c_1 - c_2| \leq V \quad \text{en } D^*,$$

y esto implica que

$$|(c_1 - c_2)(\lambda, t)| \leq V(\lambda, t) \leq \int_0^\lambda |V_x(\xi, t)| d\xi \leq tf(g(T))(A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)},$$

puesto que el máximo y el mínimo de V_x se asumen sobre λ porque $V_{xx} = V_t = 0$ sobre $x = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} |c_1(r_1, t) - c_2(r_2, t)| & \leq |c_1(\lambda, t) - c_2(\lambda, t)| + |c_2(r_1, t) - c_2(r_2, t)| \\ & \leq tf(g(T))(A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + c_{0x} t \max_{[0, T]} |\dot{r}_1 - \dot{r}_2| \\ & \leq T [f(g(T))(A + MT) + c_{0x}] \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)}. \end{aligned}$$

La demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema **PS** continúa de la siguiente manera. Se construye un conjunto cerrado $X \subset C^1[0, T]$ constituido por curvas que satisfacen la ecuaciones (2.6) – (2.9) de **PA**. Luego se define el operador $r \rightarrow \mathcal{P}r$ por

$$\mathcal{P}r(t) = \int_0^t f(c(r(\tau), \tau)) d\tau,$$

donde c es la solución de **PA** para r . Usando las ecuaciones (2.13) – (2.15) y (2.19) se puede ajustar K para lograr que \mathcal{P} sea una contracción sobre X para T pequeño. Luego el teorema del punto fijo de Banach asegura la existencia de $s \in C^1[0, T]$ tal que $\mathcal{P}s = s$. La existencia global y la unicidad de **PS** se obtiene como en [1]. ■

3 Comportamientos asintóticos.

Un aspecto interesante de este problema es el comportamiento de $s(t)$ para tiempos grandes. Hay indicios de que cuando $t \rightarrow \infty$ la frontera libre parece depender más de g que de la función f . Veamos lo siguiente. Por aplicación del Teorema de Green obtenemos la identidad:

$$0 = \oint_{\partial D_t} (xc_x - c) d\tau + xc dx \quad t > 0,$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t c(s, \tau) s \dot{s} d\tau - \int_0^t [s \dot{s} (c(s, \tau) + q)] d\tau - \int_0^s c(x, t) x dx + \int_0^t g(\tau) d\tau \\ \frac{q}{2} s^2 &= - \int_0^t c(s, \tau) d\tau - \int_0^s cx dx + \int_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

y se llega a la acotación

$$s(t) \leq \sqrt{\frac{2}{q} \int_0^t g(\tau) d\tau} \quad (3.23)$$

Esta desigualdad, no depende en absoluto de la función f . Lo que es más, experimentos numéricos muestran que solamente $g(t)$ determina de alguna forma el comportamiento de $s(t)$ para tiempos largos. Por ejemplo se encuentra la conjetura de que si g es un polinomio de grado n , entonces cuando $t \rightarrow \infty$

$$\frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

Esto no contradeciría (3.23), puesto que si $g(t) = \sum_{j=0}^n g_j t^j$ entonces

$$\sqrt{\frac{2}{q} \int_0^t g(\tau) d\tau} \leq \sqrt{\frac{2ng_n}{q(n+1)}} t^{\frac{n+1}{2}} \quad t \rightarrow \infty$$

y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{n+1}{2}}} = 0$ como en (3.24). Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas, obtenidas para varios polinomios g y diversas funciones f .

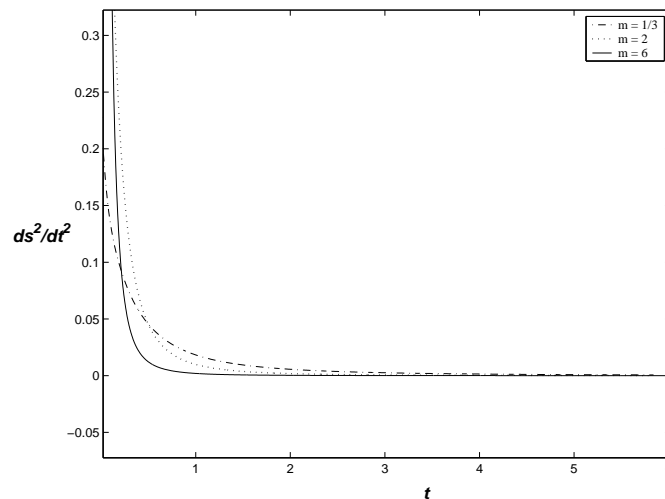


Figura 2: $q = .3$, $g(t) = 2t + 1$, $f(c) = c^m$

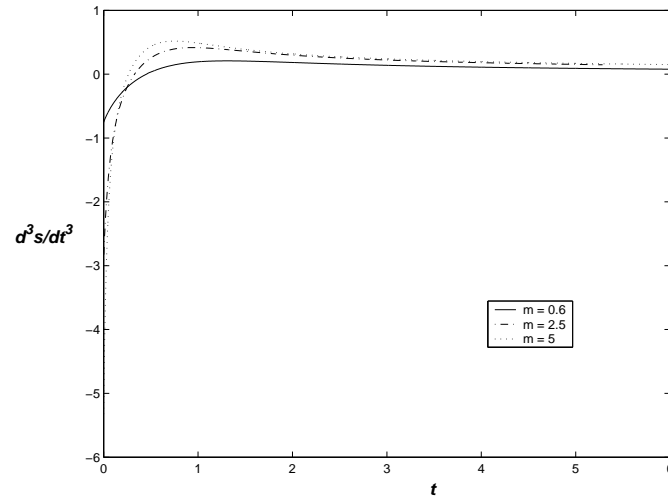


Figura 3: $q = .3$, $g(t) = t^2 + 1$, $f(c) = c^m$

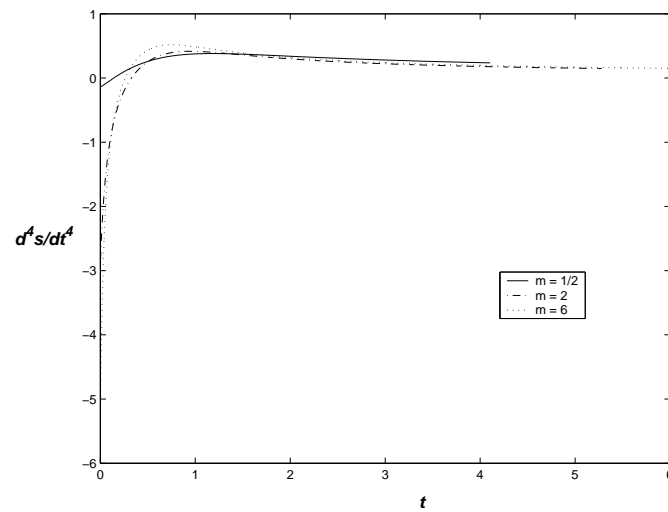


Figura 4: $q = .3$, $g(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $f(c) = c^m$.

En estos comportamientos, un caso especial es $g(t) = At + 1$. Aquí no sólo se verifica (3.24) para $n = 1$, sino que también se observa que $s(t)$ se pega asintóticamente a una recta, o sea, siempre existen constantes a y b tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [at + b - s(t)] = 0,$$

esto se ve en la gráfica que sigue, que es la ds/dt para los mismos casos de la Fig.2.

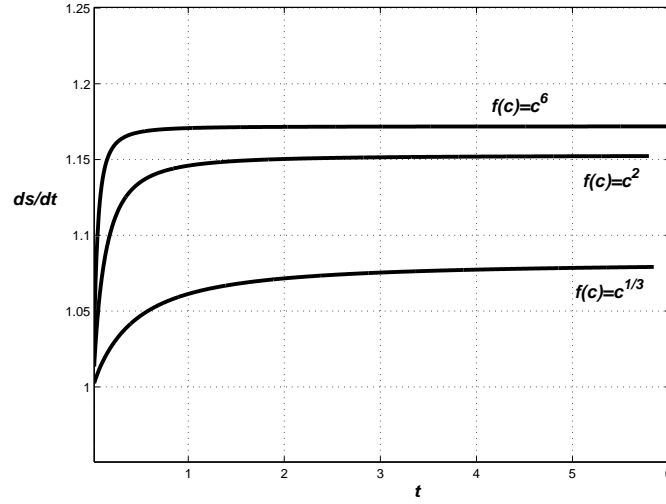


Figura 5: $q = .3$, $g(t) = 2t + 1$, $f(c) = c^m$.

4 Solución numérica.

Se puede usar el método numérico expuesto en [1] y [3] para resolver **PS**. Consiste en un esquema de diferencias finitas, en el que se discretiza el tiempo en pasos $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ calculando la concentración $C_n(x)$ y la posición de la frontera libre S_n al tiempo $t = t_n$ a partir de conocer las mismas en el instante anterior $t = t_{n-1}$. Concretamente, a $C_n(x)$ y S_n las asumiremos como la solución exacta del problema:

$$C_n'' - \frac{C_n - C_{n-1}}{\Delta t} = 0 \quad \text{en} \quad 0 < x < S_n, \quad (4.25)$$

$$C_n(0) = g(t_n), \quad (4.26)$$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t} = f(C_n(S_n)), \quad S_0 = s(0) = 0, \quad (4.27)$$

$$C_n'(S_n) = -\frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t} (q + C_n(S_n)). \quad (4.28)$$

Escribimos (4.25) como el sistema de ecuaciones:

$$C_n' = V_n \quad (4.29)$$

$$V_n' = \frac{1}{\Delta t} (C_n - C_{n-1}) \quad (4.30)$$

Ahora aplicamos la transformación de Riccati para expresar a C_n como:

$$C_n = RV_n + W_n, \quad (4.31)$$

donde:

$$R' = 1 - \frac{1}{\Delta t} R^2, \quad R(0) = 0 \quad (4.32)$$

y

$$W_n' = \frac{-1}{\Delta t} R(W_n - C_{n-1}), \quad W_n(0) = g(t_n). \quad (4.33)$$

La solución de (4.32) es $R(x) = \sqrt{\Delta t} \tanh(x/\sqrt{\Delta t})$. De (4.31):

$$C_n'(S_n) = (C_n(S_n) - W_n(S_n))/R(S_n),$$

igualando con (4.28) y despejando $C_n(S_n)$, obtenemos de (4.27):

$$(S_n - S_{n-1})/\Delta t = f\left(\frac{W_n(S_n) - qR(S_n)(S_n - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(S_n)(S_n - S_{n-1})/\Delta t}\right),$$

o sea que S_n es un cero de la función:

$$\sigma_n(x) = (x - S_{n-1})/\Delta t - f\left(\frac{W_n(x) - qR(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}\right). \quad (4.34)$$

Se demostrará que esta función está lo suficientemente bien definida para que exista S_n (recordemos que f sólo está definida en $[0, \infty)$). Entonces, una vez obtenido S_n (que se asumirá como el primer $x > S_{n-1}$ que anula a $\sigma_n(x)$), ponemos:

$$\dot{S}_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.35)$$

$$C_n(S_n) = \frac{W_n(S_n) - R(S_n)\dot{S}_n q}{1 + R(S_n)\dot{S}_n}, \quad (4.36)$$

$$C'_n(S_n) = V_n(S_n) = -\dot{S}_n \frac{W_n(S_n) + q}{1 + R(S_n)\dot{S}_n}. \quad (4.37)$$

Ahora que tenemos W_n y $V(S_n)$ se puede integrar sobre $[0, S_n]$ la ecuación

$$V'_n = \frac{1}{\Delta t}(RV_n + W_n - C_{n-1}), \quad (4.38)$$

Luego de (4.31) se obtiene $C_n(x)$ al tiempo $t = t_n$ en $[0, S_n]$. Para $x > S_n$, se la extiende a $C_n(x)$ linealmente según (4.36) y (4.37). Y como dato inicial usaremos:

$$C_0(x) = -f(1)(q+1)x + 1 \quad \forall x \quad (4.39)$$

Lema 4.1 *Existe una raíz $S_n > S_{n-1}$ de σ_n . Además $0 < C_n \leq g(T)$ en $[0, S_n]$ y $C'_n < 0$ en $[0, \infty)$.*

Demostración. $C_0(S_0) = 1$ y $C'_0(S_0) = -f(1)(q+1) < 0$. Supongamos la afirmación válida para $n-1$. Restando C'_{n-1} miembro a miembro en (4.33), podemos resolver la ODE que resulta para $W_n - C_{n-1}$, obteniendo:

$$(W_n - C_{n-1})(x) = \frac{-\int_0^x C'_{n-1}(r)e^{\int_0^r R/\Delta t} dr}{e^{\int_0^x R/\Delta t}},$$

de donde sale que $W_n(x) > C_{n-1}(x) \forall x > 0$, en consecuencia, de (4.33) W_n es decreciente. Ahora observemos que la expresión:

$$\frac{W_n(x) - qR(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}$$

es un función continua, decreciente y positiva en $S_{n-1} \leq x < x_0$, para cierto x_0 donde se anula (W_n tiene ahora derivada negativa y no acotada). Pero entonces $\sigma_n(x_0) = \frac{x_0 - S_{n-1}}{\Delta t} - f(0) > 0$, por definición de f . Por otro lado:

$$0 < C_{n-1}(S_{n-1}) \leq W_n(S_{n-1}),$$

o sea $\sigma_n(S_{n-1}) = -f(W_n(S_{n-1})) < 0$, con lo que existe un primer $S_n \in (S_{n-1}, x_0)$ que hace cero a σ_n . Con esto resulta $\dot{S}_n > 0$, $C_n(S_n) > 0$ y $V_n(S_n) < 0$. Resolviendo (4.38) tenemos:

$$V_n(x) = \frac{\int_{S_n}^x \frac{W_n(r) - C_{n-1}(r)}{\Delta t} e^{-\int_0^r R/\Delta t} dr + V_n(S_n)e^{-\int_0^{S_n} R/\Delta t}}{e^{\int_0^x R/\Delta t}} \quad x \in [0, S_n],$$

con lo que $C'_n < 0$ en $[0, \infty)$, lo que implica $g(t_n) = C_n(0) \geq C_n \geq C_n(S_n) > 0$ en $[0, S_n]$. ■
Observemos que por (4.27),

$$0 < S_n - S_{n-1} = f(C_n(S_n))\Delta t \leq f(g(T))\Delta t. \quad (4.40)$$

Referencias

- [1] **A. Fasano, G. H. Meyer y M. Primicerio**, *On a Problem in the Polymer Industry: Theoretical and Numerical Investigation of Swelling*, S.I.A.M., vol. 17, No. 4, 945-960 (1986).
- [2] **G. Astarita y G. C. Sarti**, *A Class of Mathematical Models for Sorption of Swelling Solvents in Glassy Polymers*, Polymer Engineering and Science, vol. 18, No. 5, 388-395 (1978).
- [3] **G. H. Meyer**, *One-Dimensional Parabolic Free Boundary Problems*, S.I.A.M. Review, vol. 19, No. 1, 17-33 (1977).
- [4] **A. Fasano y M. Primicerio**, *Free Boundary Problems for Nonlinear Parabolic Equations with Nonlinear Free Boundary Conditions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 72, 247-273 (1979).
- [5] **A. Comparini y R. Ricci**, *On the Swelling of a Glassy Polymer in Contact with a Well-stirred Solvent*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 7, 238-250 (1985).
- [6] **A. Comparini, R. Ricci y C. Turner**, *Penetration of a solvent into a non-homogeneous polymer*. Meccanica, vol 23, 75-80 (1988).
- [7] **D. Andreucci y R. Ricci**, *A free boundary problem arising from sorption of solvent in glassy polymers*. Quarterly of applied mathematics, vol. 44, 649-657 (1987).