MAT

Serie A

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN:1515-4904

4

VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones.

Segunda Parte

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
2001

UNIVERSIDAD AUSTRAL
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES

ISSN 1515-4904

MAT

SERIE A : CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 4

VI SEMINARIO SOBRE PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE Y SUS APLICACIONES
Segunda Parte

Domingo A. Tarzia (Ed.)

INDICE

Rosario, Septiembre 2001

MAT – Serie A, 4 (2001), 1-10.

EL PROBLEMA DE HELE-SHAW COMO UN PROBLEMA LÍMITE PARA LA ECUACIÓN DE LOS MEDIOS POROSOS

Omar GIL

Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia"
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República Oriental del Uruguay
Julio Herrera y Reissig 565
11300 MONTEVIDEO, URUGUAY

omargil@fing.edu.uy

Resumen

En este trabajo discutimos el comportamiento de las soluciones de la *ecuación de los medios porosos* $u_t = \Delta(u^m)$ cuando el exponente m tiende a infinito. Para que la solución de esta ecuación esté determinada fijaremos un dato inicial u_0 y, si el dominio Ω en el que se está trabajando es distinto de todo el espacio, un dato de borde g en la frontera de Ω. En este trabajo supondremos que ambos datos son no negativos. Mostramos que en el límite se obtiene una evolución que consiste en una proyección del dato inicial u_0 a una función $\tilde{u}_0$ que satisface $\tilde{u}_0 \leq 1$, seguida de una evolución que corresponde a un *problema de Hele-Shaw* con dato inicial $\tilde{u}_0$ y dato lateral g. La proyección inicial está caracterizada por un problema variacional conocido como el *problema de la mesa*

Clasificación: 35K65, 35R35, 76S05

Palabras clave: ecuación de los medios porosos, problema de Hele-Shaw, problema de la mesa, capa límite.

Abstract

In this lecture we discuss the behaviour of solutions to the *Porous Media Equation* $u_t = \Delta(u^m)$ when the exponent m goes to infinity. In order to completely determine the solution of the equation, initial data u_0 and, in case the working domain Ω is not the whole space, boundary data g on the boundary of Ω must be given. We will take both non negative. We show that the limit evolution is a projection of the initial data u_0 to some function $\tilde{u}_0$ satisfying $\tilde{u}_0 \leq 1$, followed by a Hele-Shaw evolution with initial data $\tilde{u}_0$ and boundary data g. The initial projection is described by means of a variational problem known as *the mesa problem.*

AMS subject classification: 35K65, 35R35, 76S05

Key words: boundary layer, Hele-Shaw problem, mesa problem, Porous Media Equation.

1. La ecuación de los medios porosos

La *ecuación de los medios porosos* (EMP)

$$u_t = \Delta(u^m)$$

aparece en la modelización de diversos fenómenos y es una las ecuaciones no lineales de difusión que ha sido más ampliamente estudiada a partir de la segunda mitad del siglo pasado. Por ejemplo, puede ser empleada para describir la filtración de agua en un medio poroso. En este proceso, la altura $z = u(x, y, t)$ de la zona saturada obedece la ecuación de Boussinesq, que es justamente EMP cuando la dimensión n del espacio es 2 y el exponente m también es igual a 2, ver [Be, GMOT]. El flujo laminar de gas en un medio poroso también puede ser analizado por medio de EMP. En este caso tendremos $n = 3$ y la densidad u obedece la ecuación con un valor de $m \geq 2$, que depende del proceso que estemos analizando a través de la ley de estado

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1}$$

que relaciona la presión v con la densidad u, ver [M].

En lo sucesivo consideraremos soluciones no negativas de la ecuación de los medios porosos para $m > 1$, definidas en un dominio Ω contenido en R^n. Prescribiremos un dato inicial

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

y, cuando la frontera de Ω sea no vacía, un dato lateral

$$u^m(x,t) = g(x) \geq 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0.$$

Muchos aspectos dinámicos de la ecuación, como la velocidad de propagación finita y la aparición de *fronteras libres*, o *interfaces*, en la evolución, son comunes todo el rango de valores $m > 1$ para el exponente de la ecuación. En efecto, si $m > 1$ la ecuación de los medios porosos es una ecuación parabólica que degenera en el nivel $u = 0$, en el que se anula también la difusividad $D(u) = mu^{m-1}$. Esto produce la aparición de una interface, o frontera libre, que separa las regiones en las que u es positiva de aquellas en las que se anula. Esta interface se propaga con una velocidad finita $\vec{V}$, que puede ser calculada a partir de la variable v por medio de la *Ley de Darcy*

$$\vec{V} = -\nabla v,$$

que es en realidad una de las hipótesis dinámicas básicas que conducen a la obtención de la ecuación de los medios porosos como modelo para diversos procesos de difusión. Por conveniencia, utilizaremos los nombres *densidad* y *presión* para las variables u y v respectivamente, aunque estemos trabajando con valores de m que no correspondan a ningún modelo físico.

2. El problema de Hele-Shaw

El problema de Hele-Shaw es un modelo matemático bidimensional que describe el movimiento de un fluido viscoso e incompresible confinado entre dos placas paralelas en una celda delgada [EJ, ST]. La variable principal en la descripción de este fenómeno es la presión v en el fluido. La presión del aire se considera igual a 0, y se desprecian los efectos debidos a la tensión superficial. La hipótesis básica del modelo es que la dinámica está gobernada por la Ley de Darcy. Este hecho, junto con la condición de incompresibi-lidad $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ implican que la presión es una función armónica en el conjunto en que es positiva.
$v = 0$
cuya evolución está gobernada por la Ley de Darcy. Si el flujo transcurre en una región Ω del espacio la evolución estará determinada si se fija el valor de la presión en la frontera Ω de
Ω_0 inicialmente ocupada por el fluido.

El modelo de Hele-Shaw tiene aplicaciones en la industria del plástico [Ri], y en electromecanizado [MGR]. También puede ser considerado como un caso límite del problema de Stefan a una fase en el que el calor específico de la fase líquida es nulo [LR, V]. Consideraremos en esta nota la generalización natural de este problema a cualquier dimensión n.

3. El límite $m \to \infty$ en el problema de enfoque

La conexión entre la ecuación de los medios porosos y el problema de Hele-Shaw resulta de utilidad en la descripción del fenómeno conocido como *enfoque*, en que una solución de EMP evoluciona en forma tal que su frontera libre colapsa en un punto en un cierto instante T. Existe una familia de soluciones radiales, autosemejantes de enfoque para EMP que, escritas en la variable presión v y para $t < T$ tienen la forma

$$v(r,t) = (T-t)^{2J-1} f(x), \qquad x = r(T-t)^{-J},$$

donde f está soportada en un intervalo de la forma $x \geq x_0$. Esto hace que en cada instante t el soporte de v sea el conjunto $r > x_0(T-t)^J$, cuya interfase se enfoca en el origen en tiempo T. El exponente $J = J(n,m)$ depende de la dimensión espacial n y el valor de m en EMP. Si $n = 1$ vale 1 para cualquier valor de m, pero está en el intervalo $(1/2,1)$ si $n \geq 2$. El hecho de que el exponente sea estrictamente menor que 1 produce cierta singularidad en el momento del enfoque, porque la velocidad de la interface se hace infinito en ese instante. El cálculo detallado del exponente J es, en consecuencia, de interés para la descripción del enfoque -un fenómeno físico digno de estudio en sí mismo- y para la teoría de regularidad de EMP. Ver la introducción de [AGV] y sus referencias.

Para el problema de Hele-Shaw hay soluciones autosemejantes explícitas de enfoque con exponente $J = 1/2$ si $n \geq 2$. Este es justamente el valor límite del exponente para la ecuación de los medios porosos, tal como establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 1 [AGV]. Si $n \geq 2$ entonces $lim_{m \to \infty} J(n,m) = 1/2$.

Además es cierto que los perfiles f de las soluciones de enfoque para EMP convergen a los correspondientes a Hele-Shaw. Ver [AGV] por los detalles.

4. El límite $m \to \infty$ cuando el dato inicial u_0 está acotado por 1

Presentaremos ahora un análisis del paso al límite $m \to \infty$ para EMP en un contexto más general. Hemos visto en los párrafos anteriores que la Ley de Darcy y la variable presión aparecen como ingredientes fundamentales en la descripción de la dinámica de los dos modelos que trataremos en este artículo, lo que incluye la evolución de las fronteras libres. En nuestra descripción del límite la variable v tendrá un papel destacado. De hecho, elegiremos escribir la ecuación de los medios porosos en la forma

$$u_t = \Delta v, \qquad v = u^m.$$

La variable v que acabamos de introducir no es exactamente la variable presión que aparece en la Ley de Darcy, pero observemos que es "esencialmente" la misma variable para valores grandes de m, que son justamente los que nos interesa considerar. Cuando el exponente m tiende a infinito la relación $v = u^m$ se aproxima al grafo H definido por

$$H(v) = \begin{cases} [0,1], & v = 0, \\ 1, & v > 0, \end{cases}$$

en la región $u \geq 0$, $v \geq 0$, del plano (u,v). En consecuencia, la evolución límite estará caracterizada por las ecuaciones

$$u_t = \Delta v, \qquad u \in H(v).$$

Este problema de evolución, junto con la prescripción de un dato inicial u_0 para la variable u y un dato lateral g para la v, es la *formulación débil para el problema de Hele-Shaw* que consideraremos en esta nota. Una formulación del problema de Hele-Shaw en término del grafo H aparece ya en [dBF]. Los detalles acerca de la formulación a que haremos referencia en este trabajo pueden encontrarse en [GQ1]. Ver también [V].

Para enunciar nuestro próximo teorema llamaremos u_m a una solución de la ecuación de los medios porosos con exponente m, y v_m a su potencia u_m^m.

Teorema 2 [GQ1]. Consideremos un dominio Ω con frontera acotada y suave, una función u_0 medible y con soporte compacto que satisface $0 \leq u_0 \leq 1$, y una función $g \geq 0$ que es la restricción al borde de Ω de una función de $W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Entonces existe un único par de funciones (u,v) que es solución del problema de Hele-Shaw con dato inicial u_0 y dato lateral g. Además, para todo $T > 0$, las funciones v_m convergen en $L^1(\Omega \times (0,T))$ a la función v.

El teorema que acabamos de enunciar provee una descripción del comportamiento de las soluciones de la ecuación de los medios porosos para grandes valores de m cuando el dato inicial no supera el nivel 1. Observemos que el grafo H que aparece en el límite no admite valores de u mayores que 1. Por lo tanto, cuando la hipótesis $u_0 \leq 1$ no se satisface el dato inicial debe "adaptarse" al grafo, lo que provoca en el problema límite una proyección de u_0 a una nueva función $\tilde{u}_0$ que no supera el valor 1. Para valores grandes de m esta proyección se refleja en la aparición de una capa límite que conecta las funciones u_0 y $\tilde{u}_0$ en una escala de tiempos que presentaremos más adelante.

5. Formulación variacional del problema de Hele-Shaw

Para manejar el caso en que $\|u_0\|_\infty > 1$ introduciremos una *formulación variacional del problema de Hele-Shaw* que puede obtenerse a partir de la formulación débil que estamos manejando. Si integramos respecto al tiempo la ecuación $u_t = \Delta v$ obtenemos

$$u(\cdot,t) = u_0 + \Delta w(\cdot,t),$$

donde hemos definido w como

$$w(\cdot,t) = \int_0^t v(\cdot,s)ds .$$

La condición de pertenencia al grafo de las variables u y v implica $(1-u)v = 0$. Por lo tanto la nueva variable w debe satisfacer

$$(1-u_0-\Delta w(\cdot,t))w_t = 0, \quad 1-u_0-\Delta w(\cdot,t) \geq 0, \quad w \geq 0.$$

En realidad puede mostrarse que la primera igualdad se satisface si ponemos w en lugar de su derivada respecto al tiempo w_t, por lo que se tiene

$$(1-u_0-\Delta w(\cdot,t))w = 0, \quad 1-u_0-\Delta w(\cdot,t) \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Remitimos al lector a [GQ1] por una prueba detallada de este último paso. Sin embargo, digamos que la posibilidad de pasar a una formulación con w en vez de w_t puede verse como consecuencia de una "propiedad de retención " para el problema de Hele-Shaw que asegura que una vez que la variable $v = w_t$ toma un valor positivo en un cierto punto del espacio para un cierto tiempo t continua siendo positiva en ese punto para todos los tiempos posteriores.

El conjunto de condiciones sobre w que hemos obtenido, junto con los datos de borde

$$w(x,t) = g(x)t, \qquad x \in \partial\Omega, \ t \geq 0,$$

que provienen de integrar respecto al tiempo la condición $v = g$ en $\partial\Omega$, constituyen una nueva formulación para el problema de Hele-Shaw a la que nos referimos como *formula-ción variacional del problema de Hele-Shaw*. Esta formulación variacional para el problema de

Hele-Shaw generaliza ligeramente la que fue introducida en el trabajo [EJ]. En [EJ] sólo se consideran funciones indicatrices de conjuntos como dato u_0 para el pro-blema, lo que es equivalente a prescribir la región Ω_0 del espacio ocupada inicialmente por el fluido. La flexibilidad que permite considerar cualquier función con recorrido en $[0,1]$ como dato para Hele-Shaw nos será imprescindible para analizar el límite de EMP.

Por cierto, esta nueva formulación es equivalente a la formulación débil, y también caracteriza la evolución, cuando el dato inicial u_0 satisface $u_0 \leq 1$. Notemos que, bajo esta hipótesis, para $t = 0$ obtenemos que la función $w(x,0) \equiv 0$ satisface todas las condiciones del problema, incluidas las condiciones de borde. Si el dato lateral g es distinto de cero entonces para tiempos positivos la condición de borde para w ya no es nula, y la función $w(x,t)$ recoge la información sobre la evolución posterior debida a la presencia de un dato de frontera no trivial.

6. El límite cuando $\|u_0\|_\infty > 1$

Comencemos por observar que cuando el dato u_0 supera el valor 1 la función $w(x,0) \equiv 0$ ya no es solución para la formulación variacional en $t = 0$, porque la condi-ción $1 - u_0 - \Delta w(\cdot,0) \geq 0$ no se satisfaría. En cambio, para la solución $w(\cdot,0)$ del proble-ma se tiene que

$$\tilde{u}_0 = u_0 + \Delta w(\cdot,0)$$

satisface la condición $\tilde{u}_0 \leq 1$ de compatibilidad con el grafo que vincula las variables u y v del problema de Hele-Shaw. Esta proyección de u_0 a $\tilde{u}_0$ es conocida como el *problema de la mesa*, que aparece en la descripción del límite $m \to \infty$ para la ecuación de los medios porosos en los casos en que el dominio Ω es todo el espacio R^n, o el dato de frontera sobre $\partial\Omega$ es nulo . Ver [BBH] y sus referencias.

El problema límite evoluciona a partir de este nuevo dato inicial $\tilde{u}_0$ y lo que observamos es una solución del problema de Hele-Shaw en Ω, con dato lateral g para v y dato inicial $u(x,0) = \tilde{u}_0(x)$. Vemos entonces que el problema límite consiste de una proyección instantánea del dato inicial u_0 a $\tilde{u}_0$, seguida de una evolución gobernada por Hele-Shaw. Notemos que la descripción variacional del problema es capaz de dar cuenta de ambos fenómenos, pero no la forma débil. De hecho, no existe solución para la formulación débil del problema de Hele-Shaw cuando se tiene que el dato inicial satisface $\|u_0\|_\infty > 1$, y en la descripción del límite $m \to \infty$ para la ecuación de los medios porosos es necesario incorporar una descripción independiente del proceso de proyección del dato inicial si se desea expresar el problema límite en términos de su formulación débil. Recogemos el contenido de esta discusión en nuestro próximo teorema, que es una extensión del Teorema 2 en varios sentidos.

Teorema 3 [GQ2]. Consideremos un dominio Ω con frontera acotada y suave, una función u_0 medible, con soporte compacto, no negativa y acotada, y una función $g \geq 0$ que es la restricción al borde de Ω de una función de $W^{1,2}(\Omega) \bigcap L^{\infty}(\Omega)$. Sea $\tilde{u}_0$ la proyección de u_0 en el sentido del problema de la mesa. Sea (u,v) el par que es solución del problema de Hele-Shaw con dato inicial $\tilde{u}_0$ y dato lateral g. Entonces, para todo $T > t > 0$ las funciones $u_m(\cdot,t)$ convergen en $L^1(\Omega)$ a $u(\cdot,t)$, y las funciones v_m convergen en $L^1(\Omega \times (t,T))$ a la función v. El par (u,v) puede calcularse a partir de la función w que aparece en la formulación variacional del problema de Hele-Shaw por las fórmulas

$$u(\cdot,t) = u_0 + \Delta w(\cdot,t), \qquad v = w_t .$$

7. La capa límite

Hemos visto entonces que el caso en que $\|u_0\|_{\infty} > 1$ produce para el problema límite una transición instantánea del dato inicial a un nuevo dato $\tilde{u}_0$ tal que $\|\tilde{u}_0\|_{\infty} \leq 1$. Para valores grandes de m esto corresponde a la formación de una capa límite que conecta ambos estados. La evolución dentro de la capa límite tiene una escala de tiempos muy rápida, que en el límite $m \to \infty$ se ve como el colapso instantáneo de todas las porciones del dato inicial que están por encima del nivel 1. Para conjeturar cuál es la escala de tiempo y las variables adecuadas para la descripción de la capa límite introduciremos una variable temporal $t(t)$ y una expresión de u en esta escala de tiempo definida por

$$\bar{u}_m(x,t) = u_m(x,t(t)).$$

Entonces

$$\bar{u}_{m,t}(x,t) = u_{m,t}(x,t(t))t'(t) = \Delta(t'(t)u_m^m(x,t(t))) .$$

Esto sugiere definir $t(t) = t^{m+1}/(m+1)$ y

$$\bar{v}_m(x,t) = t^m \bar{u}_m^m(x,t)$$

de modo que las nuevas variables también satisfacen la ecuación $\bar{u}_t = \Delta \bar{v}$. Notemos que en este caso la relación que deben satisfacer las variables $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en el límite es $u(\cdot,t) \in H_t(v(\cdot,t))$, donde H_t es el grafo monótono definido por

$$H_t(v) = \begin{cases} [0,1/t], & v = 0, \\ 1/t, & v > 0. \end{cases}$$

Si integramos respecto al tiempo la ecuación para las nuevas variables, introducimos

$$\overline{w}(\cdot,t)=\int_0^t \overline{v}(\cdot,s)ds\ .$$

y repetimos el razonamiento que nos llevó a la formulación variacional en la escala de tiempo original obtenemos, en el límite $m\to\infty$, las siguientes condiciones sobre $\overline{w}$:

$$(1/t-u_0-\Delta\overline{w}(\cdot,t))\overline{w}=0\ ,\ 1/t-u_0-\Delta\overline{w}(\cdot,t)\geq 0\ ,\ \overline{w}\geq 0.$$

La condición de borde para $\overline{w}$ está dada, para $0<t\leq 1$ y m finito, por

$$\overline{w}(x,t)=\frac{g(x)t^{m+1}}{m+1}\ ,\qquad x\in\partial\Omega\ .$$

Naturalmente, la condición de borde en el límite es que $\overline{w}$ debe anularse sobre la frontera de Ω. A este problema límite que se obtiene para cada tiempo t con condición de borde nula lo llamaremos *problema de la mesa a altura* $1/t$. Estamos ahora en condiciones de enunciar el teorema que contiene la descripción de la capa límite.

Teorema 3 [GQ2]. Bajo las mismas hipótesis que el Teorema 2 llamemos $\overline{w}$ a la función que resulta de resolver el problema de la mesa a altura $1/t$ para la función u_0, e introduzcamos $\overline{u}(\cdot,t)=u_0+\Delta\overline{w}(\cdot,t)$, $\overline{v}=\overline{w}_t$. Entonces para todo $t\in(0,1]$ las funciones $\overline{u}_m(\cdot,t)$ convergen en $L^1(\Omega)$ a $\overline{u}(\cdot,t)$. Las funciones $\overline{v}_m$ convergen en $L^1(\Omega\times(0,1))$ a la función $\overline{v}$.

Vale la pena observar que nuestra descripción de la capa límite contiene la conexión con la escala de tiempo original, ya que el resultado final de la evolución dentro de la capa límite, que se obtiene para el valor $t=1$ en la escala de tiempos correspondiente, se obtiene resolviendo el problema de la mesa a altura 1, que es justamente el que caracterizaba la proyección del dato inicial u_0.

8. El comportamiento de los soportes en el límite $m\to\infty$

Un aspecto relevante de la teoría de la ecuación de los medios porosos tiene que ver con la velocidad finita de propagación que tiene la ecuación, lo que provoca que si el dato inicial u_0 tiene soporte compacto entonces también lo tiene la solución $u_m(\cdot,t)$ para los tiempos posteriores. Resulta importante entonces conocer cómo evoluciona el soporte de u_m a medida que pasa el tiempo. Al considerar la ecuación de los medios porosos hemos introducido dos variables u_m y v_m cuyos soportes coinciden, ya que la relación que hay entre ambas es simplemente una potencia. Sin embargo, en el problema límite la relación entre u y v es la pertenencia a un cierto grafo, y bien puede ocurrir -cosa que realmente sucede en algunos ejemplos- que v se anule en regiones en las que u es positiva, lo que hace que los soportes de ambas variables puedan ser muy diferentes. Para valores de m grandes los soportes de u_m y v_m se aproximan a un cierto conjunto S que es esencialmente el soporte de u. Daremos la caracterización precisa del conjunto S definiendo sus secciones $S(t)$ a tiempo constante en términos del dato inicial u_0 y la función w que aparece en la formulación variacional del problema límite como

$$S(t) = \{u_0 > 0\} \cup \{w(\cdot, t) > 0\}.$$

En la escala de tiempos de la capa límite ocurre algo análogo, con un conjunto al que llamaremos $\overline{S}$ y que describiremos en términos de u_0 y $\overline{w}$. Introducimos entonces $\overline{S}$ por medio de

$$\overline{S}(t) = \{u_0 > 0\} \cup \{\overline{w}(\cdot, t) > 0\}.$$

Nuevamente, la interpretación heurística de $\overline{S}(t)$ es que se trata de los puntos del espacio en que la función $\overline{u}(\cdot, t)$ es positiva.

Teorema 4 [GQ2]. Sea u_0 una función continua y de soporte compacto. Entonces

$$\text{lím}_{m\to\infty} \{u_m(\cdot, t) > 0\} = S(t), \quad t > 0;$$
$$\text{lím}_{m\to\infty} \{\overline{u}_m(\cdot, t) > 0\} = \overline{S}(t), \quad 0 < t \leq 1,$$

en el sentido de la convergencia respecto a la distancia de Hausdorff.

Referencias

[AGV] Aronson, D.G., Gil, O. y Vázquez, J.L., *Limit behaviour of focusing solutions to nonlinear diffusions.* Comm. Partial Differential Equations, 1998, **23**, no. 1&2, 307--332.

[Be] Bear, J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier, New York, 1971.

[dBF] di Benedetto, E. y Friedman, A., *The ill-posed Hele-Shaw model and the Stefan problem for supercooled water.* Trans. Amer. Math. Soc., 1984, **282**, no. 1, 183--204.

[BBH] Bénilan, Ph., Boccardo, L. y Herrero, M.A., *On the limit of solutions of* $u_t = \Delta u^m$ *as* $m \to \infty$. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 1989, Fascicolo Speciale, 1--13.

[EJ] Elliot, C.M. y Janovský, V., *A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh {Sect. A}, 1981, **88**, 93--107.

[GQ1] Gil, O. y Quirós, F., *Convergence of the porous media equation to Hele-Shaw*. Leiden Report W98-16, 1998. To appear in Nonlinear Anal.

[GQ2] Gil, O. y Quirós, F., *Boundary layer formation in the transition from the Porous Media Equation to a Hele-Shaw flow*. PreMat 00/32, 2000.

[GMOT] Goncerzewicz, J., Marcinkowska, H., Okrasinski, W. y Tabisz, K., *On the percolation of water from a cylindrical reservoir into the surrounding soil*. Zastosow. Mat., 1978, **16**, 249--261.

[LR] Louro, B. y Rodrigues, J.F., *Remarks on the quasi-steady one phase Stefan problem*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Scet. A, 1986, **102**, 263--275.

[MGR] McGeough, J.A. y Rasmussen, H., *On the derivation of the quasi-steady model in electromechanical machining*. J. Inst. Math. Applics., 1974, **13**, 13--21.

[M] Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. McGraw-Hill, New York, 1937.

[Ri] Richardson, S., *Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel.* J. Fluid Mech., 1972, **56**, 609--618.

[ST] Saffman, P.G. y Taylor, G.I., *The penetration of fluid into a porous medium Hele-Shaw cell.* Proc. Roy. Soc., 1958, **A 245**, 312--329

[V] Vázquez, J.L., *A new look at the zero specific heat limit of the Stefan problem.* Preimpresión, 1998.