

MAT

Serie 

Conferencias, seminarios
y trabajos de Matemática

ISSN: 1515-4904

10

*Segundas Jornadas
sobre Ecuaciones
Diferenciales,
Optimización y
Análisis Numérico*

*Domingo A. Tarzia
Cristina V. Turner (Eds.)*

Departamento
de Matemática,
Rosario,
Argentina
Diciembre 2005

UNIVERSIDAD AUSTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES



MAT

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA

ISSN: 1515-4904
Propiedad de ACES

DIRECTOR

D. A. TARZIA Departamento de Matemática – CONICET, FCE-UA,
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

COMITE EDITORIAL Y CIENTIFICO

L. A. CAFFARELLI Department of Mathematics, Univ. of Texas at Austin,
RLM 8100 Austin, TEXAS 78712, USA.
caffarel@math.utexas.edu

R. DURAN Departamento de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
rduran@dm.uba.ar

A. FASANO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
fasano@udini.math.unifi.it

J.L. MENALDI Department of Mathematics, Wayne State University,
Detroit, MI 48202, USA.
ilm@math.wayne.edu

M. PRIMICERIO Dipartimento di Matematica “U. Dini”, Univ. di Firenze,
Viale Morgagni 67/A, 50134 FIRENZE, ITALIA.
primice@udini.math.unifi.it

M. C. TURNER FAMAF, Univ. Nac. de Córdoba,
Ciudad Universitaria, 5000 CORDOBA, ARGENTINA.
turner@mate.uncor.edu

R. WEDER Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Univ. Nac. Autónoma de México (UNAM)
Apartado Postal 20-726, MEXICO, DF 010000.
weder@servidor.unam.mx

N. WOLANSKI Departamento de Matemática, FCEyN, Univ. de Buenos Aires,
Ciudad Universitaria, Pab. 1, 1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.
wolanski@dm.uba.ar

SECRETARIA DE REDACCION

G. GARGUICHEVICH Departamento de Matemática, FCE-UA,
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA.
Graciela.Garguichevich@fce.austral.edu.ar

MAT es una publicación del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral (FCE-UA) cuyo objetivo es contribuir a la difusión de conocimientos y resultados matemáticos. Se compone de dos series:

- Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMATICA.
- Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACION MATEMATICA.

La Serie A contiene trabajos originales de investigación y/o recopilación que presenten una exposición interesante y actualizada de algunos aspectos de la Matemática, además de cursos, conferencias, seminarios y congresos realizados en el Depto. de Matemática. El Director, los miembros del Comité Editorial y Científico y/o los árbitros que ellos designen serán los encargados de dictaminar sobre los merecimientos de los artículos que se publiquen. La Serie B se compone de cursos especialmente diseñados para profesores de Matemática de cada uno de los niveles de educación: E.G.B., Polimodal, Terciaria y Universitaria.

Las publicaciones podrán ser consultadas en: www.austral.edu.ar/MAT

MAT

SERIE A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

No. 10

SEGUNDAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Domingo A. Tarzia – Cristina V. Turner (Eds.)

INDICE

Marcos Gaudiano – Cristina Turner, “Difusión de un solvente en un polímero vidrioso con una condición de contorno del tipo creciente en el tiempo”, 1-9.

Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “A one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 11-16.

Eduardo A. Santillan Marcus - Domingo A. Tarzia, “Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad”, 17-22.

Rosario, Diciembre 2005

Las Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico tuvieron lugar en la Facultad de Matemática, Física y Astronomía de la Universidad Nacional de Córdoba, en la ciudad de Córdoba, del 3 al 4 de Marzo de 2005. Fue realizado con el apoyo del Proyecto de Investigación Plurianual “Partial Differential Equations and Numerical Optimization with Applications” subsidiado por la Fundación Antorchas e integrado por los siguientes subproyectos:

- “Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation” (UA-UNR-UNRC-UNSa);
- “Inverse and Control Problems in the Mathematical Modeling of Phase Transitions in Shape Memory Alloys” (UNL);
- “Geophysical Scale Stratified Flows and Hydraulic Jumps” (UNC-UBA-UNLPA);
- “Optimization Applied to Mechanical Engineering Problems” (UNS-UNC-UNCo)

El Comité Organizador estuvo compuesto por: M.C. Maciel (Bahía Blanca), R.D. Spies (Santa Fe), D. A. Tarzia, (Rosario); C.V. Turner (Córdoba, Coordinador). La Secretaría Local estuvo compuesta por: Andrés Barrea, Marcos Gaudiano, Fernando Menzaque, Elvio A. Pilotta, Germán A. Torres.

Las Jornadas estuvieron dirigidas a graduados, profesionales y estudiantes de Matemática, Física, Química, Ingeniería y ramas afines, con conocimientos básicos sobre ecuaciones diferenciales, análisis numérico y optimización.

En MAT – Serie A, # 10 (2005) se publican tres de las conferencias y comunicaciones presentadas. Los manuscritos fueron recibidos y aceptados en diciembre de 2005.

CONFERENCIAS Y COMUNICACIONES DE LAS SEGUNDAS JORNADAS SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES, OPTIMIZACIÓN Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Jueves 3 de marzo de 2005

- Fernando Menzaque (Córdoba), “Estabilidad no lineal de flujos de dos capas”.
- Marcos Gaudiano (UNC, Córdoba) “Condición convectiva en la difusión de un solvente en un polímero viscoso”.
- Juan P. Agnelli (Córdoba), “Reconstrucción de atractores extraños (y no tanto)”.
- Karina Temperini (Santa Fe), “Regularización de operadores mal condicionados”.
- Andrés Barrea (Córdoba), “Métodos matemáticos para el crecimiento de tumores”.
- Domingo A. Tarzia.(Rosario), “Solución de un problema de Stefan para una ecuación no-clásica del calor con condición de temperatura en el borde fijo mediante ecuaciones integrales”.
- Germán A. Torres (Córdoba), “A meteorological pre-processor for a chemical transport model”.
- Luis T. Villa (Salta), “Consideraciones sobre la absorción del aceite en la primera etapa del freido de papa por inmersión”.
- Claudia Gariboldi (Río Cuarto), “Convergencia débil de soluciones en problemas penalizados de control óptimo distribuido”.
- María F. Natale (Rosario), “Solución exacta a un problema de Stefan a una fase con coeficientes térmicos no lineales”.
- Jorge Blengino (Río Cuarto), “Formulación débil de un modelo de toma de agua. Elección del software adecuado”.
- Juan C. Reginato (Río Cuarto), “Estudio del efecto de reciclado en la toma de radionúclidos por raíces de cultivos”.

Viernes 4 de marzo de 2005:

- Ma. Cristina Maciel (Bahía Blanca), “Métodos de bajo costo computacional para problemas de optimización no lineal irrestrictos”.
- Susana Orofino (Bahía Blanca), “Método de gradiente espectral en espacios de Hilbert, parte II”.
- Adriana B. Verdiell (Bahía Blanca), “Una técnica heurística para la optimización de estructuras”.
- Graciela N. Sottosanto (Neuquén), “Modelos de optimización aplicados a problemas de diseño estructural”.
- Elvio A. Pilotta (Córdoba), “Validación de un algoritmo de filtros para programación no lineal usando Hard-Spheres problem”.
- Pablo Jacovkis (Buenos Aires), “El laboratorio del matemático aplicado”.
- María G. Eberle (Bahía Blanca), “Región de confianza en espacios matriciales, parte II”.
- Flavia E. Buffo (Bahía Blanca), “Simulación de la dinámica de un sistema de cuerpos en contacto vía complementariedad no lineal instantánea”.
- Javier Quinteros (Buenos Aires), “Efectos de la erosión en el levantamiento de los Andes: un modelo matemático”.
- Alejandro Otero (Buenos Aires), “Simulación del comportamiento estructural de nuevos generadores eólicos”.

Difusión de un Solvente en un Polímero Vidrioso con un Condición de Contorno del Tipo Creciente en el Tiempo.

Marcos Gaudiano* y Cristina Turner †

FAMAF-UNC-CIEM-CONICET. Medina Allende s/n, c.p.:5000, Córdoba, Argentina.

Resumen

Aquí se aborda un problema de frontera libre unidimensional surgido en la industria del polímero. Se establece la existencia y unicidad de la solución, y un método numérico basado en diferencias finitas que la calcula, el cual permite observar interesantes comportamientos asintóticos de la frontera libre y la concentración del solvente en el polímero.

1 Introducción.

Supongamos una barra unidimensional semi-infinita, de cierto tipo de polímero, en contacto en un extremo con una concentración desolvente variable en el tiempo $G(t)$. Una vez superado un umbral q de concentración en el borde, el solvente penetra el material de manera tal que, en cada instante de tiempo, pueden observarse dos partes bien delimitadas: una parte mojada donde la concentración de solvente, que llamaremos $u(x, t)$ se difunde obedeciendo la ecuación del calor, y otra seca donde se asume que $u(x, t) = 0$ y que está separada de la región anterior, por un punto $s(t)$, que es función del tiempo y se denomina frontera libre. Problemas de este tipo han sido tratados en [1], [4], [5] y [6].

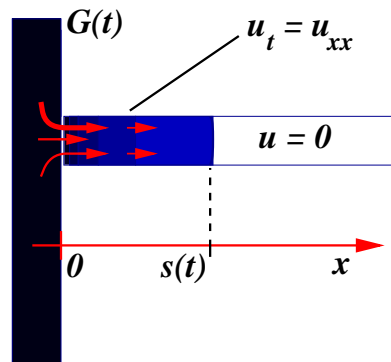


Figura 1: Situación física.

Llamemos $u(x, t)$ a la concentración del solvente. El modelo propuesto en [2] establece que para polímeros del tipo vidrioso, la velocidad con que se mueve $s(t)$ depende solamente del exceso de concentración respecto del valor umbral en el punto mismo, lo que se escribe como:

$$\dot{s}(t) = f(u(s(t), t) - q),$$

*gaudiano@mate.uncor.edu

†turner@mate.uncor.edu

donde f es una función que más adelante definiremos. Además, sobre $s(t)$ se debe cumplir la *Ley de Fick*, la cual establece que el flujo de solvente debe ser proporcional al negativo del gradiente de la concentración, que en este contexto es:

$$u_x(s(t), t) = -\kappa \dot{s}(t) u(s(t), t),$$

donde $\kappa > 0$.

Por conveniencia, realizaremos el cambio de variable $c = u - q$ y $g = G - q$. La función $c(x, t)$, no es más que el exceso de concentración para que se produzca la difusión sobre el material. Se puede normalizar para que $g(0) = 1$ y obtener la siguiente formulación del problema.

Problema PS

Dado un $T > 0$ encontrar una función c y una curva s con $s \in C^1[0, T]$, $c \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\bar{D}_T)$, $D_T = \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < s(t)\}$ y c_x continua hasta $s(t)$ tales que:

$$c_{xx} - c_t = 0 \quad \text{en} \quad D_T, \quad (1.1)$$

y para $0 \leq t \leq T$:

$$c(0, t) = g(t), \quad (1.2)$$

$$\dot{s}(t) = f(c(s(t), t)), \quad (1.3)$$

$$c_x(s(t), t) = -\dot{s}(t)(c(s(t), t) + q), \quad (1.4)$$

con

$$s(0) = 0. \quad (1.5)$$

Ahora una aclaración importante: como una concentración por definición química es una función acotada, el problema **PS** así planteado podría no tener un correlato físico directo, puesto que si $g'(t) \geq 0$ uno no debería esperar que $c(x, t)$ sea acotada $\forall(x, t)$. Sin embargo, cuando $g(t) \rightarrow \infty$ se encuentra que este problema posee interesantes comportamientos asintóticos. Por eso es que asumiremos a f como una función perteneciente a $C[0, \infty)$, con derivada positiva y continua en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$. En química se encuentra generalmente que $f(c) = \alpha c^m$, con $\alpha, m > 0$. Notar que existe $\Phi = f^{-1}$ y tiene las mismas propiedades que f . También requerimos que $g \in C^1[0, \infty)$ y que $g' \geq 0$.

2 Un problema Auxiliar.

Para la demostración de la existencia y unicidad de una solución a **PS**, se considera primero un problema más simple: quitando la ecuación (1.3) y poniendo como dato también a una curva $r(t)$ se tiene el siguiente **problema auxiliar PA**:

Dada $r \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T)$ tal que:

$$r(0) = 0, \quad (2.6)$$

$$\dot{r}(0) = f(1), \quad (2.7)$$

$$0 \leq \dot{r} \leq f(g(T)) \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8)$$

$$|\ddot{r}| \leq K \quad 0 < t < T, \quad (2.9)$$

encontrar un $c \in C^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ con c_x continua hasta $x = r(t)$, $t \in (0, T)$, tal que en $D = \{(x, t) : 0 < x < r(t), 0 < t < T\}$ cumpla:

$$c_{xx} - c_t = 0 \quad (2.10)$$

y $\forall t \in (0, T)$

$$c(0, t) = g(t), \quad (2.11)$$

$$c_x(r(t), t) = -\dot{r}(t)(\Phi(\dot{r}(t)) + q). \quad (2.12)$$

Este problema tiene única solución, la prueba se la puede encontrar en [4].

Proposición 2.1 Tomando T suficientemente pequeño la solución de **PA** satisface:

$$c_0 \leq c(x, t) < g(t) \quad 0 < x \leq r(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (2.13)$$

$$-c_{0x} \leq c_x(x, t) < 0 \quad 0 < x < r(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (2.14)$$

Donde c_0 y c_{0x} son constantes positivas y dependen sólo de T .

Demostración. Sea $c^1(x, t)$ la solución de **PA** para $g = 1$. En [1] se prueba que $c^1(x, t)$ verifica la ecuación (2.13). Dado que $(c - c^1)_x(r, t) = 0 \forall t$, el principio del máximo establece que el máximo y el mínimo de $c - c^1$ se asumen sobre $x = 0$. Puesto $(c - c^1)(0, t) = g(t) - 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (c - c^1)(x, t) < g(t) - 1 \\ c_0 \leq c^1(x, t) &\leq c(x, t) < c^1(x, t) - 1 + g(t) < g(t), \end{aligned}$$

obteniendo (2.13). Como $c_{xx}(0, t) = c_t(0, t) = g'(t) \geq 0$, $\max_x c_x = \max_r c_x < 0$. Para probar el lado izquierdo de (2.14) observemos que $v(x, t) = e^{-2t}(x+1)c_x(x, t)$ satisface el problema:

$$\begin{aligned} Lv &= v_{xx} - \frac{2}{x+1}v_x + \left[\frac{2}{(x+1)^2} - 2 \right] v - v_t = 0 \quad \text{en } D \\ v(0, t) - v_x(0, t) &= -e^{-2t}g'(t) \\ v(r, t) &= -e^{-2t}(r+1)\dot{r}(q + \Phi(\dot{r})) \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

Supongamos que $\min_{\bar{D}} v = v(x_0, t_0) < 0$. Si $x_0 = r(t_0)$ entonces

$$v(x_0, t_0) = -e^{-2t_0}(r(t_0)+1)\dot{r}(t_0)(\Phi(\dot{r}(t_0)) + q) \geq -(f(1)t_0 + 1)f(1)(1+q)$$

Si $x_0 > 0$ y (x_0, t_0) no está sobre la curva r , entonces $v_{xx}(x_0, t_0) \geq 0$, $v_x(x_0, t_0) = 0$ y $v_t(x_0, t_0) \leq 0$, luego $Lv(x_0, t_0) > 0$, que es falso. Si por último $x_0 = 0$, entonces $v_x(0, t_0) \geq 0$ y:

$$v(x, t) \geq v(0, t_0) = v_x(0, t_0) - e^{-2t_0}g'(t_0) \geq -e^{2t_0}g'(t_0),$$

luego

$$v(x, t) \geq -\max(e^{2t_0}g'(t_0), (f(1)t_0 + 1)f(1)(1+q))$$

con lo que:

$$c_x(x, t) \geq -\max_{(x,t) \in \bar{D}} \left\{ \frac{e^{2t}}{x+1} \max_{0 \leq \tau \leq t} [\max(e^{2\tau}g'(\tau), (f(1)\tau + 1)f(1)(1+q))] \right\}$$

■

Proposición 2.2 La solución de **PA** cumple que $c \in C^{2,1}(\bar{D})$, $c_{xt} \in C(\bar{D} - \{(0, 0)\})$ y :

$$|c_t(x, t)| \leq m + Mt \quad \forall (x, t) \in D, \quad (2.15)$$

donde $m = \max_{[0, T]} |g'|$ y M depende de T y K .

Demostración. Notemos que siempre es posible disminuir T para que $\dot{r}(t) = f(1) + \int_0^t \ddot{r} \geq f(1) - KT > 0 \forall t \in [0, T]$. $w = (c - c^1)_t$ satisface el problema:

$$w_{xx} - w_t = 0 \quad \text{en } D, \quad (2.16)$$

$$w(0, t) = g'(t) \quad 0 < t < T, \quad (2.17)$$

$$w_x(r, t) + \dot{r}(t)w(r(t), t) = 0 \quad 0 < t < T. \quad (2.18)$$

Sea $t^* \geq 0$. Si se cumple $\max w = w(r(t^*), t^*)$ entonces

$$\max w = -\frac{w_x(r(t^*), t^*)}{\dot{r}(t^*)} \leq 0$$

De igual forma, si $\min w = w(r(t^*), t^*)$ se obtiene que $\min w \geq 0$, luego por el principio del máximo

$$|w| \leq \max_{x=0} |w| = m,$$

y (2.15) se obtiene finalmente de la ecuación (2.11) de [1]. ■

Proposición 2.3 *Bajo todas las suposiciones anteriores, existen constantes $N > 0$ y $T_0 > 0$, tales que si $T \in (0, T_0)$ y c_i es la solución de **PA** para r_i , $i = 1, 2$ resulta:*

$$|c_1(r_1, t) - c_2(r_2, t)| \leq N \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} T \quad 0 < t < T. \quad (2.19)$$

Demostración. Llamemos $\lambda = \min(r_1, r_2)$ y $\mu = \max(r_1, r_2)$.

Llamemos V a la solución del problema

$$V_{xx} - V_t = 0 \quad \text{en } D^* \quad (2.20)$$

$$V(0, t) = 0 \quad 0 < t < T \quad (2.21)$$

$$V_x(\lambda, t) = (A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \quad 0 < t < T, \quad (2.22)$$

donde $D^* = \{0 < x < \lambda, 0 < t < T\}$ y $A = m + q + g(T) \left(1 + \max_{[f(1) - KT, f(g(T))]} \Phi'\right)$.

Supongamos que $\lambda = r_1$ y $\mu = r_2$, y observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & |c_{1x}(\lambda, t) - c_{2x}(\lambda, t)| = |c_{1x}(r_1, t) - c_{2x}(r_2, t) + c_{2x}(r_2, t) - c_{2x}(r_1, t)| \\ & \leq |-\dot{r}_1(\Phi(\dot{r}_1) + q) + \dot{r}_2(\Phi(\dot{r}_2) + q)| + (m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \\ & \leq (q + m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + |\dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_1) - \dot{r}_1 \Phi(\dot{r}_1)| + |\dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_2) - \dot{r}_2 \Phi(\dot{r}_1)| \\ & \leq (q + m + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} \left(g(T) + g(T) \max_{[f(1) - KT, f(g(T))]} \Phi'\right) \\ & = V_x(\lambda, t) \end{aligned}$$

Como $(V - (c_1 - c_2))_x \geq 0$ sobre λ , por el principio del máximo obtenemos

$$0 = \min_{x=0} (V - (c_1 - c_2)) \leq V - (c_1 - c_2) \quad \text{en } D^*.$$

De manera análoga se obtiene $-V \leq c_1 - c_2$ en D^* . De modo que

$$|c_1 - c_2| \leq V \quad \text{en } D^*,$$

y esto implica que

$$|(c_1 - c_2)(\lambda, t)| \leq V(\lambda, t) \leq \int_0^\lambda |V_x(\xi, t)| d\xi \leq tf(g(T))(A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)},$$

puesto que el máximo y el mínimo de V_x se asumen sobre λ porque $V_{xx} = V_t = 0$ sobre $x = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} |c_1(r_1, t) - c_2(r_2, t)| & \leq |c_1(\lambda, t) - c_2(\lambda, t)| + |c_2(r_1, t) - c_2(r_2, t)| \\ & \leq tf(g(T))(A + Mt) \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)} + c_{0x} t \max_{[0, T]} |\dot{r}_1 - \dot{r}_2| \\ & \leq T [f(g(T))(A + MT) + c_{0x}] \|r_1 - r_2\|_{C^1(0, T)}. \end{aligned}$$

La demostración de la existencia y unicidad de la solución del problema **PS** continúa de la siguiente manera. Se construye un conjunto cerrado $X \subset C^1[0, T]$ constituido por curvas que satisfacen la ecuaciones (2.6) – (2.9) de **PA**. Luego se define el operador $r \rightarrow \mathcal{P}r$ por

$$\mathcal{P}r(t) = \int_0^t f(c(r(\tau), \tau)) d\tau,$$

donde c es la solución de **PA** para r . Usando las ecuaciones (2.13) – (2.15) y (2.19) se puede ajustar K para lograr que \mathcal{P} sea una contracción sobre X para T pequeño. Luego el teorema del punto fijo de Banach asegura la existencia de $s \in C^1[0, T]$ tal que $\mathcal{P}s = s$. La existencia global y la unicidad de **PS** se obtiene como en [1]. ■

3 Comportamientos asintóticos.

Un aspecto interesante de este problema es el comportamiento de $s(t)$ para tiempos grandes. Hay indicios de que cuando $t \rightarrow \infty$ la frontera libre parece depender más de g que de la función f . Veamos lo siguiente. Por aplicación del Teorema de Green obtenemos la identidad:

$$0 = \oint_{\partial D_t} (xc_x - c) d\tau + xc dx \quad t > 0,$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t c(s, \tau) s \dot{s} d\tau - \int_0^t [s \dot{s} (c(s, \tau) + q)] d\tau - \int_0^s c(x, t) x dx + \int_0^t g(\tau) d\tau \\ \frac{q}{2} s^2 &= - \int_0^t c(s, \tau) d\tau - \int_0^s cx dx + \int_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

y se llega a la acotación

$$s(t) \leq \sqrt{\frac{2}{q} \int_0^t g(\tau) d\tau} \quad (3.23)$$

Esta desigualdad, no depende en absoluto de la función f . Lo que es más, experimentos numéricos muestran que solamente $g(t)$ determina de alguna forma el comportamiento de $s(t)$ para tiempos largos. Por ejemplo se encuentra la conjetura de que si g es un polinomio de grado n , entonces cuando $t \rightarrow \infty$

$$\frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (3.24)$$

Esto no contradeciría (3.23), puesto que si $g(t) = \sum_{j=0}^n g_j t^j$ entonces

$$\sqrt{\frac{2}{q} \int_0^t g(\tau) d\tau} \leq \sqrt{\frac{2ng_n}{q(n+1)}} t^{\frac{n+1}{2}} \quad t \rightarrow \infty$$

y $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^{n+1}s}{dt^{n+1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\frac{n+1}{2}}} = 0$ como en (3.24). Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas, obtenidas para varios polinomios g y diversas funciones f .

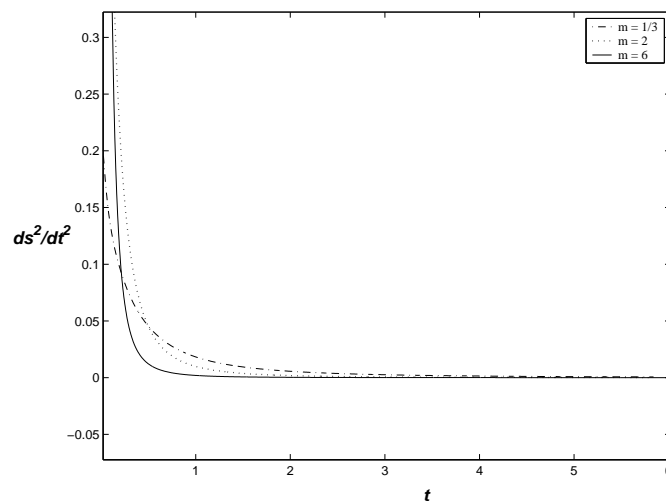


Figura 2: $q = .3$, $g(t) = 2t + 1$, $f(c) = c^m$

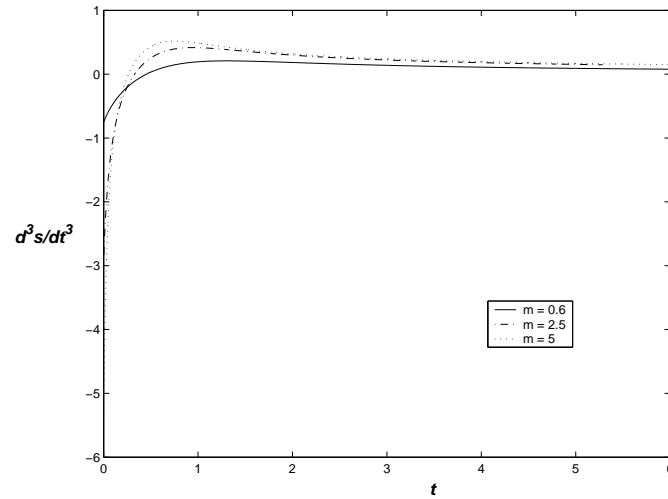


Figura 3: $q = .3$, $g(t) = t^2 + 1$, $f(c) = c^m$

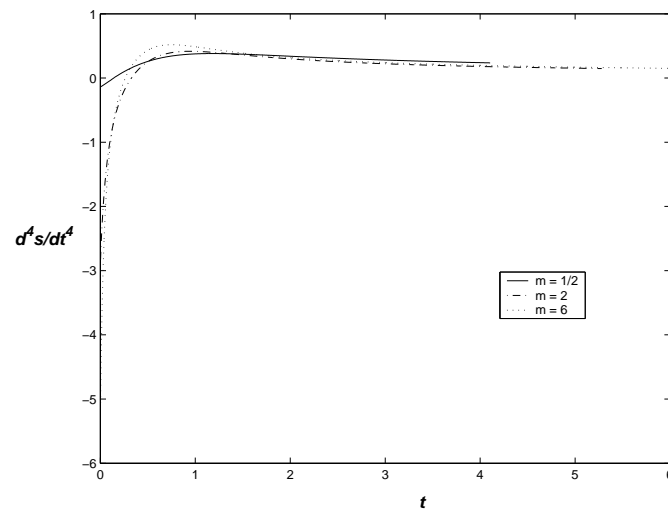


Figura 4: $q = .3$, $g(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, $f(c) = c^m$.

En estos comportamientos, un caso especial es $g(t) = At + 1$. Aquí no sólo se verifica (3.24) para $n = 1$, sino que también se observa que $s(t)$ se pega asintóticamente a una recta, o sea, siempre existen constantes a y b tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [at + b - s(t)] = 0,$$

esto se ve en la gráfica que sigue, que es la ds/dt para los mismos casos de la Fig.2.

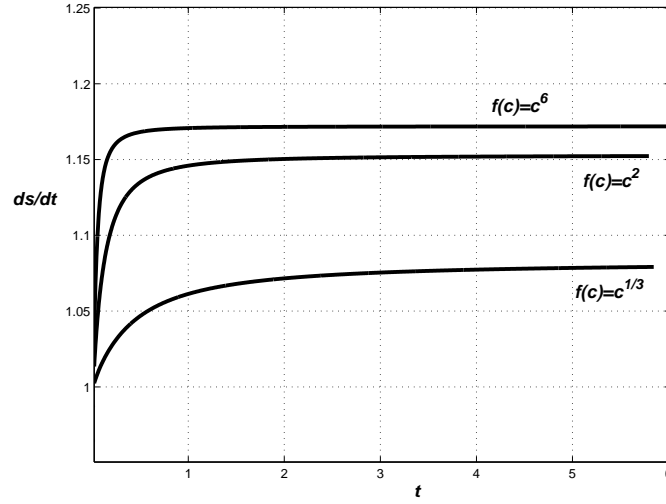


Figura 5: $q = .3$, $g(t) = 2t + 1$, $f(c) = c^m$.

4 Solución numérica.

Se puede usar el método numérico expuesto en [1] y [3] para resolver **PS**. Consiste en un esquema de diferencias finitas, en el que se discretiza el tiempo en pasos $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ calculando la concentración $C_n(x)$ y la posición de la frontera libre S_n al tiempo $t = t_n$ a partir de conocer las mismas en el instante anterior $t = t_{n-1}$. Concretamente, a $C_n(x)$ y S_n las asumiremos como la solución exacta del problema:

$$C_n'' - \frac{C_n - C_{n-1}}{\Delta t} = 0 \quad \text{en} \quad 0 < x < S_n, \quad (4.25)$$

$$C_n(0) = g(t_n), \quad (4.26)$$

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t} = f(C_n(S_n)), \quad S_0 = s(0) = 0, \quad (4.27)$$

$$C_n'(S_n) = -\frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t} (q + C_n(S_n)). \quad (4.28)$$

Escribimos (4.25) como el sistema de ecuaciones:

$$C_n' = V_n \quad (4.29)$$

$$V_n' = \frac{1}{\Delta t} (C_n - C_{n-1}) \quad (4.30)$$

Ahora aplicamos la transformación de Riccati para expresar a C_n como:

$$C_n = RV_n + W_n, \quad (4.31)$$

donde:

$$R' = 1 - \frac{1}{\Delta t} R^2, \quad R(0) = 0 \quad (4.32)$$

y

$$W_n' = \frac{-1}{\Delta t} R(W_n - C_{n-1}), \quad W_n(0) = g(t_n). \quad (4.33)$$

La solución de (4.32) es $R(x) = \sqrt{\Delta t} \tanh(x/\sqrt{\Delta t})$. De (4.31):

$$C_n'(S_n) = (C_n(S_n) - W_n(S_n))/R(S_n),$$

igualando con (4.28) y despejando $C_n(S_n)$, obtenemos de (4.27):

$$(S_n - S_{n-1})/\Delta t = f\left(\frac{W_n(S_n) - qR(S_n)(S_n - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(S_n)(S_n - S_{n-1})/\Delta t}\right),$$

o sea que S_n es un cero de la función:

$$\sigma_n(x) = (x - S_{n-1})/\Delta t - f\left(\frac{W_n(x) - qR(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}\right). \quad (4.34)$$

Se demostrará que esta función está lo suficientemente bien definida para que exista S_n (recordemos que f sólo está definida en $[0, \infty)$). Entonces, una vez obtenido S_n (que se asumirá como el primer $x > S_{n-1}$ que anula a $\sigma_n(x)$), ponemos:

$$\dot{S}_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{\Delta t}, \quad (4.35)$$

$$C_n(S_n) = \frac{W_n(S_n) - R(S_n)\dot{S}_n q}{1 + R(S_n)\dot{S}_n}, \quad (4.36)$$

$$C'_n(S_n) = V_n(S_n) = -\dot{S}_n \frac{W_n(S_n) + q}{1 + R(S_n)\dot{S}_n}. \quad (4.37)$$

Ahora que tenemos W_n y $V(S_n)$ se puede integrar sobre $[0, S_n]$ la ecuación

$$V'_n = \frac{1}{\Delta t}(RV_n + W_n - C_{n-1}), \quad (4.38)$$

Luego de (4.31) se obtiene $C_n(x)$ al tiempo $t = t_n$ en $[0, S_n]$. Para $x > S_n$, se la extiende a $C_n(x)$ linealmente según (4.36) y (4.37). Y como dato inicial usaremos:

$$C_0(x) = -f(1)(q+1)x + 1 \quad \forall x \quad (4.39)$$

Lema 4.1 Existe una raíz $S_n > S_{n-1}$ de σ_n . Además $0 < C_n \leq g(T)$ en $[0, S_n]$ y $C'_n < 0$ en $[0, \infty)$.

Demostración. $C_0(S_0) = 1$ y $C'_0(S_0) = -f(1)(q+1) < 0$. Supongamos la afirmación válida para $n-1$. Restando C'_{n-1} miembro a miembro en (4.33), podemos resolver la ODE que resulta para $W_n - C_{n-1}$, obteniendo:

$$(W_n - C_{n-1})(x) = \frac{-\int_0^x C'_{n-1}(r)e^{\int_0^r R/\Delta t} dr}{e^{\int_0^x R/\Delta t}},$$

de donde sale que $W_n(x) > C_{n-1}(x) \forall x > 0$, en consecuencia, de (4.33) W_n es decreciente. Ahora observemos que la expresión:

$$\frac{W_n(x) - qR(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}{1 + R(x)(x - S_{n-1})/\Delta t}$$

es un función continua, decreciente y positiva en $S_{n-1} \leq x < x_0$, para cierto x_0 donde se anula (W_n tiene ahora derivada negativa y no acotada). Pero entonces $\sigma_n(x_0) = \frac{x_0 - S_{n-1}}{\Delta t} - f(0) > 0$, por definición de f . Por otro lado:

$$0 < C_{n-1}(S_{n-1}) \leq W_n(S_{n-1}),$$

o sea $\sigma_n(S_{n-1}) = -f(W_n(S_{n-1})) < 0$, con lo que existe un primer $S_n \in (S_{n-1}, x_0)$ que hace cero a σ_n . Con esto resulta $\dot{S}_n > 0$, $C_n(S_n) > 0$ y $V_n(S_n) < 0$. Resolviendo (4.38) tenemos:

$$V_n(x) = \frac{\int_{S_n}^x \frac{W_n(r) - C_{n-1}(r)}{\Delta t} e^{-\int_0^r R/\Delta t} dr + V_n(S_n)e^{-\int_0^{S_n} R/\Delta t}}{e^{\int_0^x R/\Delta t}} \quad x \in [0, S_n],$$

con lo que $C'_n < 0$ en $[0, \infty)$, lo que implica $g(t_n) = C_n(0) \geq C_n \geq C_n(S_n) > 0$ en $[0, S_n]$. ■
Observemos que por (4.27),

$$0 < S_n - S_{n-1} = f(C_n(S_n))\Delta t \leq f(g(T))\Delta t. \quad (4.40)$$

Referencias

- [1] **A. Fasano, G. H. Meyer y M. Primicerio**, *On a Problem in the Polymer Industry: Theoretical and Numerical Investigation of Swelling*, S.I.A.M., vol. 17, No. 4, 945-960 (1986).
- [2] **G. Astarita y G. C. Sarti**, *A Class of Mathematical Models for Sorption of Swelling Solvents in Glassy Polymers*, Polymer Engineering and Science, vol. 18, No. 5, 388-395 (1978).
- [3] **G. H. Meyer**, *One-Dimensional Parabolic Free Boundary Problems*, S.I.A.M. Review, vol. 19, No. 1, 17-33 (1977).
- [4] **A. Fasano y M. Primicerio**, *Free Boundary Problems for Nonlinear Parabolic Equations with Nonlinear Free Boundary Conditions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 72, 247-273 (1979).
- [5] **A. Comparini y R. Ricci**, *On the Swelling of a Glassy Polymer in Contact with a Well-stirred Solvent*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. 7, 238-250 (1985).
- [6] **A. Comparini, R. Ricci y C. Turner**, *Penetration of a solvent into a non-homogeneous polymer*. Meccanica, vol 23, 75-80 (1988).
- [7] **D. Andreucci y R. Ricci**, *A free boundary problem arising from sorption of solvent in glassy polymers*. Quarterly of applied mathematics, vol. 44, 649-657 (1987).

A one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients.

Adriana C. BRIOZZO ⁽¹⁾ - María Fernanda NATALE ⁽¹⁾ -
Domingo A. TARZIA ^{(1)(2)*}

⁽¹⁾Depto de Matemática, F.C.E., Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA

⁽²⁾ CONICET, ARGENTINA

E-mail: Adriana.Briozzo@fce.austral.edu.ar;
María.Natale@fce.austral.edu.ar; Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Abstract

We study a one-phase Lamé-Clapeyron -Stefan problem for a semi-infinite material with nonlinear thermal coefficients with a constant temperature condition on the fixed face $x = 0$ following G. A. Tirskaa, Soviet Physics Doklady, 4(1959), 288-292. We obtain sufficient conditions for data in order to have the existence of an explicit solution of a similarity type which is given by using a double fixed point.

Key words: Stefan problem, Free boundary problem, Nonlinear thermal coefficients, Explicit solution, Nonlinear integral equation, Melting

AMS subject classification: 35R35, 80A22, 35C05, 45G10

1. Introduction.

The Lamé-Clapeyron-Stefan problem is nonlinear even in its simplest form due to the free boundary conditions [3, 4]. In particular, if the thermal coefficients of the material are temperature-dependent we have a doubly nonlinear free boundary problem. We consider the following free boundary problem (melting) for a semi-infinite material [1, 2]:

$$\rho(T)c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad , \quad 0 < x < s(t) \quad (1)$$

$$T(0, t) = T_b \quad (2)$$

$$T(s(t), t) = T_m \quad (3)$$

$$k(T(s(t), t))\frac{\partial T}{\partial x}(s(t), t) = -\rho_0 l s'(t) \quad (4)$$

$$s(0) = 0 \quad (5)$$

*MAT - Serie A, 10 (2005), 11-16.

where $T = T(x, t)$ is the temperature of the liquid phase; $\rho(T), c(T)$ and $k(T)$ are the body's density, its specific heat, and is thermal conductivity, respectively; T_m is the phase-change temperature, $T_b > T_m$ is the temperature on the fixed face $x = 0$; $\rho_0 > 0$ is the constant density of mass at the melting temperature; $l > 0$ is the latent heat of fusion by unity of mass and $s(t)$ is the position of phase change location. This problem was firstly considered in [5] through the integral equation (13) but any mathematical result was given.

The goal of this paper is the following: we prove, in Section II, the existence of at least one explicit solution of a similarity type for the problem (1) – (5) by using a double fixed point for the integral equation (13) and the trascendental equation (16) under certain hypothesis for data.

II. The one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients with constant temperature boundary condition on the fixed face.

If we define the following transformation

$$\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_m}{T_b - T_m} \quad (T(x, t) = T_m + (T_b - T_m)\theta(x, t)) \quad (6)$$

and we assume a similarity solution of the type

$$\theta(x, t) = f(\eta) \quad , \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_0 t}} \quad (7)$$

$$s(t) = 2\eta_0\sqrt{\alpha_0 t} \quad (8)$$

where η_0 is a positive parameter to be determined later, then the problem (1) – (5) becomes

$$[L(f)f'(\eta)]' + 2\eta N(f)f'(\eta) = 0 \quad , \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad (9)$$

$$f(0) = 1 \quad (10)$$

$$f(\eta_0) = 0 \quad (11)$$

$$f'(\eta_0) = -\frac{2\eta_0\alpha_0\rho_0 l}{k(T_m)(T_b - T_m)} \quad , \quad (12)$$

where $N(T) = \frac{\rho(T)c(T)}{\rho_0 c_0}$, $L(T) = \frac{k(T)}{k_0}$ and k_0, ρ_0, c_0 and $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0}$ are the reference thermal conductivity, density of mass, specific heat and thermal diffusivity respectively. We have that the problem (9) – (11) is equivalent to the following nonlinear integral equation of Volterra type:

$$f(\eta) = 1 - \frac{\Phi[\eta, L(f), N(f)]}{\Phi[\eta_0, L(f), N(f)]} \quad (13)$$

where Φ is given by

$$\Phi[\eta, L(f), N(f)] := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{1}{L(f)(t)} E(t, f) dt \quad (14)$$

with

$$E(x, f) := \exp \left(-2 \int_0^x \frac{N(f(s))}{L(f(s))} s ds \right) \quad (15)$$

The condition (12) becomes

$$\frac{E(\eta_0, f)}{\Phi[\eta_0, L(f), N(f)]} = \frac{\eta_0 l \sqrt{\pi}}{c_0(T_b - T_m)} \quad (16)$$

and then the following theorem holds.

Theorem 1 *The solution of the free boundary problem (1) – (5) is given by (8) and $T(x, t) = T_m + (T_b - T_m) f(\eta)$, with $\eta = x/2\sqrt{\alpha_0 t}$ where the function $f = f(\eta)$ and the coefficient $\eta_0 > 0$ must satisfy the nonlinear integral equation (13) and the condition (16) respectively. ■*

First, in order to prove the existence of the solution of the system (13) and (16) we will obtain some preliminary results. Then we shall prove that the integral equation (13) has a unique solution for any given $\eta_0 > 0$ by using a fixed point theorem. Secondly, in order to solve the problem (1) – (5) we will consider Eq. (16).

For convenience of notation, we will note $\Phi[\eta, f] \equiv \Phi[\eta, L(f), N(f)]$.

We suppose that there exists N_m, N_M, L_m, L_M positive constants such as

$$L_m \leq L(T) \leq L_M \quad , \quad N_m \leq N(T) \leq N_M \quad . \quad (17)$$

We consider $C^0[0, \eta_0]$, the space of continuous real functions defined on $[0, \eta_0]$, with its norm $\|f\| = \max_{\eta \in [0, \eta_0]} |f(\eta)|$.

Furthermore, we assume that the dimensionless thermal conductivity and specific heat are Lipschitz functions, i.e., there exists \tilde{L} and \tilde{N} are positive constants such that

$$|L(g) - L(h)| \leq \tilde{L} \|g - h\| \quad , \quad \forall g, h \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+) \quad (18)$$

$$|N(g) - N(h)| \leq \tilde{N} \|g - h\| \quad , \quad \forall g, h \in C^0(\mathbb{R}_0^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_0^+) \quad (19)$$

Then we get:

Lemma 2 *We have*

a)

$$\exp \left(-\frac{N_M}{L_m} x^2 \right) \leq E(x, f) \leq \exp \left(-\frac{N_m}{L_M} x^2 \right) \quad , \quad \forall x > 0. \quad (20)$$

b) For $0 < \eta < \eta_0$

$$\frac{1}{L_M} \sqrt{\frac{L_m}{N_M}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} \eta \right) \leq \Phi[\eta, f] \leq \frac{1}{L_m} \sqrt{\frac{L_M}{N_m}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{N_m}{L_M}} \eta \right). \quad (21)$$

Lemma 3 a) Let η_0 be a given positive real number. We suppose that the dimensionless thermal conductivity and specific heat verify conditions (17), (18) and (19). Then, for all $f, f^* \in C^0[0, \eta_0]$ we have

$$|E[\eta, f] - E[\eta, f^*]| \leq \frac{\eta^2}{L_m} \left(\tilde{N} + \frac{N_M \tilde{L}}{L_m} \right) \|f^* - f\|, \quad \forall \eta \in (0, \eta_0). \quad (22)$$

b) Let η_0 be a given positive real number. We suppose that (17), (18) and (19) holds. For all $f, f^* \in C^0[0, \eta_0]$, $0 < \eta < \eta_0$ we have

$$|\Phi[\eta, f] - \Phi[\eta, f^*]| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\tilde{N} + \frac{N_M \tilde{L}}{L_m} \right) \frac{\eta^2}{3} + \tilde{L} \right) \frac{\eta}{L_m^2} \|f^* - f\|. \quad (23)$$

Theorem 4 Let η_0 be a given positive real number. We suppose that (17), (18) and (19) holds. If η_0 satisfies de following inequality

$$\beta(\eta_0) := \frac{4}{\sqrt{N_m \pi}} \frac{\eta_0 L_M^{5/2} N_M \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} \eta_0 \right)}{L_m^4 \operatorname{erf}^2 \left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} \eta_0 \right)} \left(\left(\tilde{N} + \frac{N_M \tilde{L}}{L_m} \right) \frac{\eta_0^2}{3} + \tilde{L} \right) < 1 \quad (24)$$

then there exist a unique solution $f \in C^0[0, \eta_0]$ of the integral equation (13).

Proof. Let $W : C^0[0, \eta_0] \rightarrow C^0[0, \eta_0]$ be the operator defined by

$$W(f)(\eta) = 1 - \frac{\Phi[\eta, L(f)]}{\Phi[\eta_0, L(f)]}, \quad f \in C^0[0, \eta_0]. \quad (25)$$

The solution of the equation (13) is the fixed point of the operator W , that is

$$W(f(\eta)) = f(\eta), \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad (26)$$

Let $f, f^* \in C^0[0, \eta_0]$ be, then we obtain

$$\begin{aligned} \|W(f) - W(f^*)\| &= \operatorname{Max}_{\eta \in [0, \eta_0]} |W(f(\eta)) - W(f^*(\eta))| \\ &\leq \operatorname{Max}_{\eta \in [0, \eta_0]} \left| \frac{\Phi[\eta, f^*] \Phi[\eta_0, f] - \Phi[\eta_0, f^*] \Phi[\eta, f]}{\Phi[\eta_0, f] \Phi[\eta_0, f^*]} \right| \\ &\leq A \operatorname{Max}_{\eta \in [0, \eta_0]} |\Phi[\eta, f^*] \Phi[\eta_0, f] - \Phi[\eta_0, f^*] \Phi[\eta, f]| \leq \\ &\leq A \operatorname{Max}_{\eta \in [0, \eta_0]} (|\Phi[\eta, f^*]| |\Phi[\eta_0, f] - \Phi[\eta_0, f^*]| + |\Phi[\eta_0, f^*]| |\Phi[\eta, f^*] - \Phi[\eta, f]|) \end{aligned}$$

where

$$A = \frac{N_M L_M^2}{L_m \operatorname{erf}^2 \left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} \eta_0 \right)} > 0 \quad (27)$$

Finally, for Lemmas 2, 3 and taking into account that $0 < \eta < \eta_0$, we have

$$\|W(f) - W(f^*)\| \leq \beta(\eta_0) \|f^* - f\|.$$

Then W is a contraction operator and therefore there exists a unique solution of the integral Eq.(13) if the condition (24) is satisfied. ■

Remark 1 The solution f of the integral equation (13), given by the Theorem 4, depends on the real number $\eta_0 > 0$. For convenience in the notation from now on we take

$$f(\eta) = f_{\eta_0}(\eta) = f(\eta_0, \eta) \quad , \quad 0 < \eta < \eta_0 \quad , \quad \eta_0 > 0. \blacksquare \quad (28)$$

Let Ω be the set defined by

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \eta_0 \in \mathbb{R}^+ / \beta(\eta_0) < 1 \} = \\ &= \{ \eta_0 \in \mathbb{R}^+ / \text{there exists a solution of Eq. (13)} \} . \end{aligned}$$

Lemma 5 If

$$\frac{2L_M^2 \tilde{L}}{L_m^3} < 1 \quad (29)$$

there exists a positive number η_0^* such that

$$\beta(\eta_0) < 1 \text{ if } 0 < \eta_0 < \eta_0^* \quad , \quad \beta(\eta_0) \geq 1 \text{ if } \eta_0 \geq \eta_0^* .$$

Proof. We have $\beta(0) = \frac{2L_M^2 \tilde{L}}{L_m^3}$, $\beta(+\infty) = +\infty$ and $\beta'(\eta_0) > 0 \quad \forall \eta_0 > 0$. Then $\Omega = (0, \eta_0^*)$ where $\beta(\eta_0^*) = 1$. ■

To prove the existence of the solution of the Eq.(16), we define the real function

$$H(x) := \frac{E(x, f)}{\Phi[x, f]} \quad , \quad x > 0 \quad (30)$$

where f is the solution of Eq.(13) given by Theorem 4.

Theorem 6 The Eq.(16) has at least one solution η_0 . Moreover, if x_0 is the unique solution of equation

$$H_1(x) = \frac{x l \sqrt{\pi}}{c_0(T_b - T_m)} \quad , \quad x > 0, \quad (31)$$

and $x_0 < \eta_0^*$ then $\eta_0 \in \Omega$ with $\eta_0 < x_0$, where real function H_1 is defined by

$$H_1(x) := \frac{L_M \sqrt{N_M} \exp\left(\frac{-N_M}{L_M} x^2\right)}{\sqrt{L_m} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} x\right)} \quad , \quad x > 0 \quad (32)$$

Proof. We have

$$\text{Eq. (16)} \iff H(x) = \frac{x l \sqrt{\pi}}{c_0(T_b - T_m)} \quad , \quad x > 0.$$

Therefore, there exist at least one solution $\eta_0 > 0$ of Eq.(16) because $H(x) \leq H_1(x)$ and $H(0^+) = +\infty$, $H(+\infty) = 0$ and then $\eta_0 < x_0$. ■

Remark 2 The solution x_0 of Eq.(31) can be expressed as follows

$$x_0 := M^{-1} \left(\frac{L_M \sqrt{N_M} c_0 (T_b - T_m)}{l \sqrt{\pi} L_m} \right) \quad (33)$$

where

$$M(x) := x \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{N_M}{L_m}} x \right) \exp \left(\frac{Nm}{L_M} x^2 \right) \quad (34)$$

is an increasing real function. Then we have

$$\beta(x_0) < 1 \iff \beta \left(M^{-1} \left(\frac{L_M \sqrt{N_M} c_0 (T_b - T_m)}{l \sqrt{\pi L_m}} \right) \right) < 1. \blacksquare$$

And so we have the following Theorem

Theorem 7 (i) If N and L verify only the conditions (17), (18), (19), (29) and $\beta(x_0) < 1$ where x_0 is defined by (33) then there exists at least one solution of the problem (1) – (5) where the free boundary $s(t)$ is given by (8) and the temperature is given by $T(x, t) = T_m + (T_b - T_m)f(\eta)$, with $\eta = x/2\sqrt{\alpha_0 t}$ where f is the unique solution of the integral equation (13) and η_0 is given by Theorem 10.

(ii) If N and L verify only the conditions (17), (18), (19) and (29) then there exists at least one solution of the problem (1) – (5) for all latent heat of fusion $l > l_0$ for given others parameters where l_0 is given by

$$l_0 := \frac{L_M \sqrt{N_M} c_0 (T_b - T_m)}{\sqrt{\pi L_m} M(\eta_0^*)}$$

where $\eta_0^* > 0$ is characterized by the condition $\beta(\eta_0^*) = 1. \blacksquare$

A more complete version of these results and the corresponding study for the analogous problem with a heat flux condition on the fixed face $x = 0$ instead of the temperature condition (2) will be given in a forthcoming paper.

Acknowledgments

This paper has been partially sponsored by the projects PIP N°2000/2000 from CONICET-UA, Rosario (Argentina), Project N° 53900/4 from Fundación Antorchas (Argentina), ANPCYT PICT #03 – 11165 from Agencia (Argentina) and "Fondo de Ayuda a la investigación" from Universidad Austral (Argentina).

References

- [1] J. R. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Addison-Wesley, Menlo Park (1984).
- [2] J. Crank, *Free and moving boundary problems*, Clarendon, Oxford (1984).
- [3] S. C. Gupta, *The classical Stefan problem. Basics concepts, modelling and analysis*, Elsevier, Amsterdam (2003).
- [4] D. A. Tarzia, *A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems*, MAT-Serie A #2 (2000) (with 5869 titles on the subject, 300 pages). See [www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2\(2000\)](http://www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000))
- [5] G. A. Tirsikii, *Two exact solutions of Stefan's nonlinear problem*, Soviet Physics Doklady, **4**(1959), 288-92.

Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad. *

Eduardo A. SANTILLAN MARCUS ⁽¹⁾ - Domingo A. TARZIA ⁽¹⁾⁽²⁾

⁽¹⁾Depto de Matemática, F.C.E., Universidad Austral,
Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, ARGENTINA

⁽²⁾ CONICET, ARGENTINA

E-mail: Eduardo.Santillan@fce.austral.edu.ar;
Domingo.Tarzia@fce.austral.edu.ar

Resumen

Se considera un modelo de flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante congelamiento, con sobrecondición de temperatura y de flujo de calor en el borde fijo para la determinación de un coeficiente desconocido del material semi-infinito de cambio de fase. Se trata de un problema de frontera libre con acoplamiento de las funciones temperatura y concentración (ecuaciones de tipo Luikov) con ocho parámetros. Para uno de los casos de determinación posibles, se hallan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución y las fórmulas correspondientes para las temperaturas y concentraciones de ambas fases, la frontera libre y el coeficiente desconocido.

1. Introducción.

Los problemas de transferencia de calor y masa con cambio de fase que se llevan a cabo en un medio poroso, tales como evaporación, condensación, congelamiento, derretimiento, sublimación y desublimación, tienen una gran aplicación en procesos de separación, tecnología de alimentos, migración de calor en terrenos y suelos, etc. Debido a que este tipo de problemas es no lineal, el resolverlos usualmente tiene dificultades matemáticas. Sólo se han encontrado unas pocas soluciones exactas para casos ideales (ver [1],[2],[3],[4],[6],[7],[14] por ejemplo). Una extensa bibliografía sobre problemas de frontera libre y móvil para la ecuación de calor-difusión está dada en [15].

La formulación matemática de la transferencia de calor y masa en cuerpos de capilares porosos fue establecida por Luikov ([8],[9]). Mikhailov [10] presentó dos modelos diferentes para resolver el problema de la evaporación de humedad líquida desde un medio poroso. Para el problema del congelamiento (desublimación) de un semiespacio poroso

*MAT - Serie A, 10 (2005), 17-22.

húmedo, Mikhailov también presentó una solución exacta [11] para una condición de temperatura constante en el borde fijo $x = 0$. En el trabajo [12] fue presentada una solución explícita para las distribuciones de temperatura y humedad en un semiespacio poroso con una condición de flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ del tipo $\frac{q_0}{\sqrt{t}}$.

Ahora se considerará el modelo presentado en [11]-[12] con una sobrecondición en el borde fijo para hallar condiciones necesarias y suficientes sobre los datos para la determinación de un coeficiente desconocido siguiendo la idea de [16] para una fase y de [5] para dos fases.

Se considera el flujo de calor y humedad a través de un semiespacio poroso durante el congelamiento. La posición del frente de cambio de fase al tiempo t está dada por $x = s(t)$ que divide al cuerpo poroso en dos regiones. En la región congelada, $0 < x < s(t)$, no hay movimiento de humedad y la distribución de temperatura está descrita por la ecuación del calor

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}(x, t) = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad a_1 = \frac{k_1}{\rho c_1}. \quad (1)$$

La región $s(t) < x < +\infty$ es la parte húmeda del cuerpo de capilares porosos en donde fluyen acoplados el calor y la humedad. El proceso está descrito por el ya conocido sistema de Luikov [9] para el caso $\varepsilon = 0$ (ε es el factor de conversión de fase de líquido en vapor) dado por

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}(x, t) = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}(x, t), \quad x > s(t), \quad t > 0, \quad a_2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x > s(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Las distribuciones iniciales de temperatura y humedad son uniformes

$$\begin{cases} T_2(x, 0) = T_2(+\infty, t) = t_0, \\ u(x, 0) = u(+\infty, t) = u_0. \end{cases} \quad (4)$$

Se supone que sobre la superficie del semiespacio el flujo de calor depende del tiempo de la siguiente manera, como en [13]

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}} \quad (5)$$

donde $q_0 > 0$ es un coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$. Sobre el frente de congelamiento, existe una igualdad entre las temperaturas

$$T_1(s(t), t) = T_2(s(t), t) = t_v, \quad t > 0, \quad (6)$$

donde $t_v < t_0$.

El balance de calor y humedad en el frente de congelamiento da lo siguiente

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(s(t), t) - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = \rho r u(s(t), t) \frac{ds}{dt}(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(s(t), t) + \delta \frac{\partial T_2}{\partial x}(s(t), t) = 0, \quad t > 0. \quad (8)$$

Se considera además una sobre condición en el borde fijo $x = 0$ dada por

$$T_1(0, t) = t_s \quad (9)$$

donde $t_s < t_v$.

Se tratará de hallar fórmulas para la determinación de un coeficiente térmico desconocido elegido entre ρ (densidad de masa), a_m (difusividad de la humedad), c_1 (calor específico de la región congelada), c_2 (calor específico de la región húmeda), k_1 (conductividad térmica de la región congelada), k_2 (conductividad térmica de la región húmeda), δ (coeficiente de gradiente térmico), r (calor latente) junto a la frontera libre $s(t)$, las temperaturas T_1, T_2 y la humedad u .

Seguendo [12], se tiene que

$$T_1(x, t) = t_v - \frac{\sqrt{\pi a_1} q_0}{k_1} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a_{12}}}\right) \right], \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0 \quad (10)$$

$$T_2(x, t) = t_v + \frac{t_0 - t_v}{1 - \operatorname{erf}(\lambda)} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \operatorname{erf}(\lambda) \right], \quad x > s(t), \quad t > 0 \quad (11)$$

$$u(x, t) = u_0 - \frac{\delta \rho c_2 a_m (t_0 - t_v)}{k_2 \left(1 - \frac{\rho a_m c_2}{k_2}\right)} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) - \frac{\exp\left(\left(\frac{k_2}{\rho a_m c_2} - 1\right) \lambda^2\right)}{\sqrt{\frac{\rho a_m c_2}{k_2}}} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right)\right) \right], \quad (12)$$

$$x > s(t), \quad t > 0$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_2 t}. \quad (13)$$

donde el parámetro λ (que caracteriza la frontera libre) y el coeficiente térmico desconocido deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones trascendentales:

$$\frac{\sqrt{\pi} q_0}{\sqrt{k_2 c_2 \rho} (t_0 - t_v)} \exp\left(-\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2} \lambda^2\right) - F_1(\lambda) = \quad (14)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} r u_0}{c_2 (t_0 - t_v)} \lambda \left[1 - \frac{\delta (t_0 - t_v)}{u_0 \left(\frac{k_2}{a_m \rho c_2} - 1\right)} \left(1 - \frac{Q\left(\frac{\sqrt{k_2} \lambda}{\sqrt{a_m \rho c_2}}\right)}{Q(\lambda)}\right) \right]$$

$$\operatorname{erf}\left(\lambda \sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}}\right) = \frac{t_v - t_s}{q_0} \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}}. \quad (15)$$

donde

$$F_1(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\operatorname{erfc}(x)}, \quad Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x).$$

De los ocho casos posibles en la presente comunicación sólo se considerará el caso de la determinación de $\{\lambda, \delta\}$.

Primero se tiene el siguiente lema:

Lema 1: Se tiene que

$$E(x) = \frac{m^2 - 1}{1 - \frac{Q(mx)}{Q(x)}} < 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall m > 0, \quad m \neq 1.$$

Demostración: La función Q tiene las siguientes propiedades

$$Q(0) = 0, \quad Q(+\infty) = 1, \quad Q'(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Entonces si se considera que $m > 1$, entonces se tiene que $m^2 - 1 > 0$ y $\frac{Q(mx)}{Q(x)} > 1$, con lo que surge $E(x) < 0$.

Si en cambio se contempla el caso $0 < m < 1$, surge que $m^2 - 1 < 0$ y $\frac{Q(mx)}{Q(x)} < 1$, con lo que también resulta $E(x) < 0$. ■

Entonces se tiene el siguiente resultado para la determinación del caso $\{\lambda, \delta\}$:

Teorema 2: Si

$$\max \left(\frac{(t_v - t_s) \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}}}{q_0 \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right)}; \frac{(t_0 - t_v) \sqrt{\frac{\rho k_2 c_2}{\pi}}}{q_0} \right) < 1, \quad (16)$$

donde $\lambda^* > 0$ es la única solución de la ecuación

$$g_1(x) = g_2(x), \quad x > 0 \quad (17)$$

con

$$\begin{cases} g_1(x) = F_1(x) + \frac{u_0 r \sqrt{\pi}}{c_2 (t_0 - t_v)} x, \\ g_2(x) = \frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2} x^2}, \end{cases} \quad (18)$$

entonces $\exists! \lambda > 0, \delta > 0$ dados por las expresiones

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1 c_2}{k_2 c_1}} \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{t_v - t_s}{q_0} \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} \right) \quad (19)$$

$$\delta = \frac{u_0}{t_0 - t_v} \frac{\frac{k_2}{\rho a_m c_2} - 1}{Q \left(\lambda \sqrt{\frac{k_2}{\rho a_m c_2}} \right)} \left\{ 1 - \frac{c_2 (t_0 - t_v)}{\lambda r u_0 \sqrt{\pi}} \left(\frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}} - F_1(\lambda) \right) \right\}. \quad (20)$$

Demostración: Considerando que de (16) se tiene

$$\frac{t_v - t_s}{q_0} \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} < 1 \quad (21)$$

surge trivialmente que existe un único $\lambda > 0$ solución de la ecuación (15) en la forma (19). Luego, sustituyendo λ en (14) y despejando δ se obtiene (20). Resta aún mostrar que $\delta > 0$.

Primero se observa que gracias al Lema 1, para tener $\delta > 0$ basta imponer que

$$1 - \frac{c_2(t_0 - t_v)}{\lambda r u_0 \sqrt{\pi}} \left(\frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}} - F_1(\lambda) \right) < 0$$

es decir que

$$F_1(\lambda) + \frac{r u_0 \sqrt{\pi}}{c_2(t_0 - t_v)} \lambda < \frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} e^{-\frac{\lambda^2 k_2 c_1}{k_1 c_2}}$$

lo que de acuerdo a las definiciones (18) se puede escribir como

$$g_1(\lambda) < g_2(\lambda). \tag{22}$$

Como las funciones g_1 y g_2 tienen las siguientes características:

$$g_1(0^+) = 1, \quad g_1(+\infty) = +\infty, \quad g_1'(x) > 0, \quad \forall x > 0.$$

$$g_2(0^+) = \frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}}, \quad g_2(+\infty) = 0, \quad g_2'(x) < 0, \quad \forall x > 0.$$

se puede concluir que cuando

$$\frac{q_0}{t_0 - t_v} \sqrt{\frac{\pi}{\rho k_2 c_2}} > 1, \tag{23}$$

existirá un único $\lambda^* > 0$ tal que $g_1(\lambda^*) = g_2(\lambda^*)$. Entonces surge que (22) es válida cuando

$$0 < \lambda < \lambda^*. \tag{24}$$

Para finalizar se observa que las hipótesis necesarias (21), (23) y (24) se pueden resumir de la manera siguiente: Como la función erf es creciente, (24) es equivalente a

$$\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda \right) < \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right),$$

y entonces (21) y (24) se pueden resumir en

$$\frac{t_v - t_s}{q_0} \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}} < \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right). \tag{25}$$

Así pues, por (24) y (25) se tiene que

$$q_0 > \frac{(t_v - t_s) \sqrt{\frac{\rho k_1 c_1}{\pi}}}{\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{k_2 c_1}{k_1 c_2}} \lambda^* \right)}, \quad q_0 > (t_0 - t_v) \sqrt{\frac{\rho k_2 c_2}{\pi}},$$

lo que puede resumirse en (16) .■

Los siete casos restantes serán considerados en un futuro trabajo que se encuentra en etapa de preparación.

References

- [1] Cho, S. H., "An exact solution of the coupled phase change problem in a porous medium", Int. J. Heat and Mass Transfer **18**, 1139-1142 (1975).
- [2] Cho, S. H. - Sunderland, J. E., "Heat conduction problem with melting or freezing", J. Heat. Transfer **91**, 421-426 (1969).
- [3] Fasano, A. - Guan, Z. - Primicerio, M. - Rubinstein, I., "Thawing in saturated porous media", Meccanica, **28**, 103-109 (1993).
- [4] Fasano, A. - Primicerio, M. - Tarzia, D. A., "Similarity solutions in class of thawing processes", Math. Models Methods Appl. **9**, 1-10 (1999).
- [5] Gonzalez, A. M. - Tarzia, D. A., "Determination of unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for the two phase Stefan problem", Int. J. Engng. Sci. **34** N° 7, 799-817 (1996).
- [6] Gupta, L. N., "An approximate solution to the generalized Stefan's problem in a porous medium", Int. J. Heat Transfer **17**, 313-321 (1974).
- [7] Lombardi, A. - Tarzia, D. A., "Similarity solutions for thawing processes with a heat flux condition at the fixed boundary", Meccanica, **36** (2001), 251-264.
- [8] Luikov, A. V., "Heat and mass transfer in capillary-porous bodies", Pergamon Press, Oxford (1966).
- [9] Luikov, A. V., "Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies", Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 1-14 (1975).
- [10] Mikhailov, M. D., "Exact solution of temperature and moisture distributions in a porous half-space with moving evaporation front", Int. J. Heat Mass Transfer **18**, 797-804 (1975).
- [11] Mikhailov, M. D., "Exact solution for freezing of humid porous half-space", Int. J. Heat Mass Transfer **19**, 651-655 (1976).
- [12] Santillan Marcus, E. A. - Tarzia, D. A., "Explicit solution for freezing of humid porous half-space with a heat flux condition", Int. J. Eng. Science **38**, 1651-1665 (2000).
- [13] Tarzia, D. A., "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math. **39**, 491-497 (1981).
- [14] Tarzia, D. A., "Soluciones exactas del problema de Stefan unidimensional", Cuadern. Inst. Mat. B. Levi **12**, 5-36 (1985).
- [15] Tarzia, D. A., "A bibliography on moving - free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems", MAT-Serie A #2 (2000) (con 5869 títulos en el tema, 300 páginas). Ver [www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2\(2000\)](http://www.austral.edu.ar/MAT-SerieA/2(2000)).
- [16] Tarzia, D. A., "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", Adv Appl. Math. **3**, 74-82 (1982).

MAT

INDICE GENERAL

Serie A: CONFERENCIAS, SEMINARIOS Y TRABAJOS DE MATEMÁTICA

ISSN 1515-4904

1 (2000): E.Mascolo – F.Siepe, “Functionals of the Calculus of Variations with non standard growth conditions”.

2 (2000): D.A.Tarzia, “A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems”.

3 (2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Primera Parte:

- Ma. Cristina Sanziel, “Conditions to obtain a waiting time for a discrete two-phase Stefan problem”, 1-6.
- Ariel L. Lombardi – Domingo A. Tarzia, “On similarity solutions for thawing processes”, 7-12.
- Ricardo Weder, “Direct and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential”, 13-20.
- Domingo A. Tarzia, “Stefan problem for a non-classical heat equation”, 21-26.
- Pedro Morin – Rubén D. Spies, “A quasilinearization approach for parameter identification in nonlinear abstract Cauchy problems”, 27-41.

4 (2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Segunda Parte:

- Omar Gil, “El problema de Hele-Shaw como un problema límite para la ecuación de los medios porosos”, 1-10.
- Juan C. Reginato – Domingo A. Tarzia, “Estimations of nutrient uptakes by roots of crops through a moving boundary model”, 11-16.
- Oscar D. Quiroga – Luis T. Villa – Fernando Suarez, “Problemas de frontera libre en procesos de transferencia de materia y energía con reacción química”, 17-22.
- Edgardo A. Spiazzi – Rodolfo H. Mascheroni, “Modelo de deshidratación osmótica de alimentos vegetales”, 23-32.
- Eduardo A. Santillan Marcus – Domingo A. Tarzia, “Exact solutions for phase change processes in humid porous half spaces”, 33-38.

5 (2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Tercera Parte:

- Adriana C. Briozzo – Domingo A. Tarzia, “On a two-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 1-10.
- Germán Torres – Cristina V. Turner, “Métodos de diferencias finitas para un problema de Bingham unidimensional”, 11-26.
- Analía Gastón – Gustavo Sánchez Sarmiento – Horacio Reggiardo, “Un problemas de frontera libre: Fusión de una vaina de acero dentro de una cuchara de acería”, 27-32.

- Ma. Fernanda Natale – Domingo A. Tarzia, “An exact solution for a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal coefficient”, 33-36.
- Claudia Lederman – Juan L. Vazquez – Noemí Wolanski, “Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion with transport”, 37-41.

6 (2002): F.Talamucci, “Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System”.

7 (2004): D.A.Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Primera Parte:

- Adriana B. Verdiell – María C. Maciel – Susana L. Orofino – Tatiana I. Gibelli, “A survey of the spectral gradient method”, 1-14.
- María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “An integral equation in order to solve a one-phase Stefan problem with nonlinear thermal conductivity”, 15-24.
- María C. Sanziel – Domingo A. Tarzia, “Optimization on the heat flux in a mixed elliptic problem with temperature constraints”, 25-30.
- Claudia M. Gariboldi – Domingo A. Tarzia, “A new proof of the convergence of distributed optimal controls on the internal energy in mixed elliptic problems”, 31-42.

8 (2004): D.A.Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Segunda Parte:

- Rubén D. Spies, “Differentiability of the solutions of a semilinear abstract Cauchy problem with respect to parameters”, 1-10.
- Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “An explicit solution for a two-phase Stefan problem with a similarity exponential heat sources”, 11-19.
- Domingo A. Tarzia, “An explicit solution for a two-phase unidimensional Stefan problem with a convective boundary condition at the fixed face”, 21-27.

9 (2005): M. Amar – R. Gianni, “A Brief Survey on Homogenization with a Physical Application”.

10 (2005): D.A.Tarzia – C.V. Turner (Eds.), “Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”:

- Marcos Gaudiano – Cristina Turner, “Difusión de un solvente en un polímero vidrioso con una condición de contorno del tipo creciente en el tiempo”, 1-9.
- Adriana C. Briozzo – María F. Natale – Domingo A. Tarzia, “A one-phase Lamé-Clapeyron-Stefan problem with nonlinear thermal coefficients”, 11-16.
- Eduardo A. Santillan Marcus - Domingo A. Tarzia, “Un caso de determinación de coeficientes térmicos desconocidos de un material semiinfinito poroso a través de un problema de desublimación con acoplamiento de temperatura y humedad”, 17-22.

Serie B: CURSOS Y SEMINARIOS PARA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ISSN 1515-4912

1 (2000): D.A.Tarzia, “Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática”.

2 (2003): D.A.Tarzia, “Matemática: Operaciones numéricas y geometría del plano”

INFORMACION PARA LOS AUTORES

Los trabajos han de estar escritos en español o inglés. Excepcionalmente el Director y el Comité Editorial podrán admitir trabajos escritos en otros idiomas ampliamente utilizados. Deberá presentarse el texto mecanografiado o elaborado mediante un procesador de textos, con caracteres de 12 puntos, en un rectángulo de 16cm×24cm y en una sola cara del papel. Trabajos escritos en LATEX o en MS-WORD serán bienvenidos y en ese caso el autor deberá adjuntar un diskette con los archivos correspondientes, o bien enviarlos por correo electrónico.

En cada trabajo deberá constar, en la primera página, a partir de la quinta línea, el título en letras mayúsculas y sin punto final, el nombre del o de los autores, su identificación institucional y su correspondiente dirección postal y electrónica. Se acompañará un resumen que no exceda las 200 palabras en español y otro en inglés, añadiendo en ambos las palabras claves. También se solicita la inclusión de la correspondiente AMS-Mathematics Subject Classification.

Las tablas y gráficos deberán insertarse en el texto y estar numeradas en forma correlativa.

Las referencias bibliográficas se compondrán sólo de los trabajos mencionados en el texto y se incluirán al final, por orden alfabético de autores y en orden cronológico, si existieran varios trabajos del mismo autor; cada una precedida por el correspondiente número de orden, entre corchetes. Las citas en el texto se efectuarán según los siguientes modelos: [1]; Caffarelli & Vazquez [1]; Caffarelli & Vazquez (1995, [1]). Y en la referencia final:

[1] CAFFARELLI L. A. & VAZQUEZ J.L., *A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation*, Trans. Amer. Math. Soc., 347 (1995), pp. 411-441.

[2] FASANO A. & PRIMICERIO M., *Blow-up and regularization for the Hele-Shaw problem*, in *Variational and free boundary problems*, Friedman A. & Spruck J. (Eds.), IMA Math. Appl. Vol. 53, Springer Verlag, New York (1993), pp. 73-85.

[3] RODRIGUES J. F., *Obstacle problems in mathematical physics*, North-Holland Mathematics Studies N. 134, North-Holland, Amsterdam (1987).

Al final de la última página deberán dejarse al menos 2 líneas en blanco para incluir los datos de recepción.

INTERCAMBIOS

Departamento de Matemática – Biblioteca, Servicio de Canje
Facultad de Ciencias Empresariales -Universidad Austral
Paraguay 1950, S2000FZF ROSARIO, ARGENTINA

NUMEROS APARECIDOS

Serie A:

- #1 (2000): E.Mascolo – F.Siepe, “Functionals of the Calculus of Variations with non standard growth conditions”.
- #2 (2000): D.A.Tarzia, “A Bibliography on Moving-Free Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems”.
- # 3(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Primera Parte.
- #4(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Segunda Parte.
- #5(2001): D.A.Tarzia (Ed.), “VI Seminario sobre Problemas de Frontera Libre y sus Aplicaciones”, Tercera Parte.
- #6(2002): F.Talamucci, “Some Problems Concerning with Mass and Heat Transfer in a Multi-Component System”.
- #7(2004): D.A.Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Primera Parte.
- #8(2004): D.A.Tarzia (Ed.), “Primeras Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”, Segunda Parte.
- #9(2005): M.Amar – R.Gianni, “A brief survey on homogenization with a physical application”.
- #10(2005): D.A.Tarzia – C.V. Turner (Eds.), “Segundas Jornadas sobre Ecuaciones Diferenciales, Optimización y Análisis Numérico”.

Serie B:

- #1(2000): D.A.Tarzia, “Cómo pensar, entender, razonar, demostrar y crear en Matemática”.
- #2(2003): D.A.Tarzia, “Matemática: Operaciones numéricas y geometría del plano”.

